
UNIVERSITÉ DE LIÈGE
EXAMEN D'ADMISSION AUX ÉTUDES
D'INGÉNIEUR CIVIL

Géométrie et géométrie analytique
Première session 2019

Question1

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé et on donne les points P d'abscisse 1, Q d'ordonnée 1 tels que les droites OP et OQ soient perpendiculaires. Déterminer le lieu de la projection orthogonale M de l'origine O sur la droite PQ .

Résolution:

Si P possède les coordonnées $(1, \lambda)$ et Q les coordonnées $(\mu, 1)$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, les vecteurs $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$ sont perpendiculaires si et seulement si $\lambda + \mu = 0$. Sous cette condition, le triangle POQ est isocèle puisque l'on a alors $|PO| = |QO| = \sqrt{1 + \lambda^2}$. On en déduit que le point M est le milieu du côté $[PQ]$, et possède donc les coordonnées

$$\left(\frac{1 - \lambda}{2}, \frac{1 + \lambda}{2} \right).$$

L'élimination de $\lambda \in \mathbb{R}$ fournit la droite d'équation cartésienne

$$x + y = 1,$$

qui est le lieu recherché.

Examen de géométrie du 1er juillet 2019
Corrigé de la question 2

Question 2

Soit G le centre de gravité du triangle ABC . Démontrer que l'on a

$$\frac{\|AB\|^2 + \|BC\|^2 + \|CA\|^2}{\|GA\|^2 + \|GB\|^2 + \|GC\|^2} = 3$$

où $\|XY\|$ désigne la longueur du segment joignant le point X au point Y .

Réponse

L'hypothèse est la donnée d'un triangle ABC dont on désigne par G le centre de gravité.

La thèse est de montrer que l'on a

$$\frac{\|AB\|^2 + \|BC\|^2 + \|CA\|^2}{\|GA\|^2 + \|GB\|^2 + \|GC\|^2} = 3.$$

Voici une manière de procéder pour démontrer la thèse.

Tout d'abord, on peut noter que la longueur du segment joignant deux points est aussi la norme (longueur) des vecteurs joignant les deux points (l'ordre des points n'a pas d'importance).

Cela étant, puisque G est le centre de gravité du triangle ABC , pour tout point X on a

$$3\overrightarrow{XG} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}.$$

Dans le cas particulier où $X = G$, cette relation donne

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

qui fournit

$$\left\| \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} \right\|^2 = 0.$$

Cette expression se développe comme suit

$$\left\| \overrightarrow{GA} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{GB} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{GC} \right\|^2 + 2\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} = 0$$

ou, de manière équivalente (*)

$$\left\| \overrightarrow{GA} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{GB} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{GC} \right\|^2 = 2\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{GC}.$$

Exprimons maintenant la valeur de $\|AB\|^2 + \|BC\|^2 + \|CA\|^2$ (numérateur apparaissant dans la thèse) en fonction de vecteurs faisant intervenir le centre de gravité G . On a

$$\begin{aligned} & \|AB\|^2 + \|BC\|^2 + \|CA\|^2 \\ &= \left\| \overrightarrow{AB} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{BC} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{CA} \right\|^2 \\ &= \left\| \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GC} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GA} \right\|^2 \\ &= \left\| \overrightarrow{AG} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{GB} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{BG} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{GC} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{CG} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{GA} \right\|^2 + 2\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{GA} \\ &= 2\left\| \overrightarrow{AG} \right\|^2 + 2\left\| \overrightarrow{GB} \right\|^2 + 2\left\| \overrightarrow{GC} \right\|^2 + 2\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{GA}. \end{aligned}$$

En utilisant l'égalité obtenue en (*), on obtient

$$\begin{aligned} \|AB\|^2 + \|BC\|^2 + \|CA\|^2 &= 2\left\| \overrightarrow{AG} \right\|^2 + 2\left\| \overrightarrow{GB} \right\|^2 + 2\left\| \overrightarrow{GC} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{AG} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{GB} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{GC} \right\|^2 \\ &= 3 \left(\left\| \overrightarrow{AG} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{GB} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{GC} \right\|^2 \right) \\ &= 3 \left(\|GA\|^2 + \|GB\|^2 + \|GC\|^2 \right) \end{aligned}$$

et donc on a l'égalité que l'on devait démontrer.