UNIVERSITE DE LIEGE

Faculté des Sciences Appliquées

QUESTIONS POSEES AUX EXAMENS D'ADMISSION

2014 - 2018

EXAMENS DE 2014

Avertissement
Les modalités de l'examen sont modifiées : chaque épreuve écrite se trouve réduite à une durée de 2h30.

JUILLET 2014

ALGEBRE

1. Pour quelles valeurs du paramètre réel m le polynôme

$$X^2 + (2m-1)X + m^2$$

admet-il deux racines positives dont l'une est le triple de l'autre ? Quelles sont les racines ?

2. Résoudre l'inéquation suivante :

$$(x-1)\sqrt{x+4} < 2-4x$$

ANALYSE

1. La fonction th, appelée tangente hyperbolique, est définie par

$$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$$

Déterminer le domaine de définition de la fonction th, ses éventuelles asymptotes ainsi que les éventuels extrema et points d'inflexion de son graphe. Sur base des résultats obtenus, esquisser le graphe de $\mathrm{th}(x)$.

2. On considère les intégrales

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx, \qquad n \in \mathbb{N}$$

   a) Calculer I_0, I_1, I_2 et I_4.

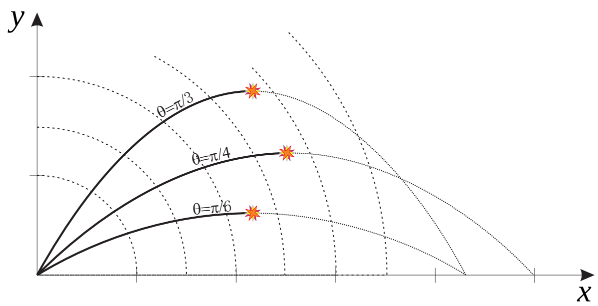
   b) Montrer que

$$I_n = f(n) - I_{n-2}, \qquad n \geq 2$$

   où $f(n)$ est une fonction de n à déterminer.

3. Une base de tir se trouve à l'origine du plan (x,y). Un missile est lancé au temps $t=0$ avec une vitesse initiale v_0 et une inclinaison d'angle θ par rapport à l'horizontale. La trajectoire du missile est donnée par

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \cos\theta \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\theta \end{cases}$$



   Ce missile a la particularité d'exploser lorsqu'il atteint sa hauteur maximale dans le ciel.

   a) Déterminer (en fonction de v_0, g et θ) le moment $t^\star$ auquel le missile explose.

   b) Déterminer (en fonction de v_0 et g) l'angle $\theta^\star$ qui permet de maximiser la distance entre la base de tir et l'endroit de l'explosion. Que vaut la distance maximale ?

   Justifier chacun des résultats obtenus. Les constantes v_0 et g sont strictement positives et $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

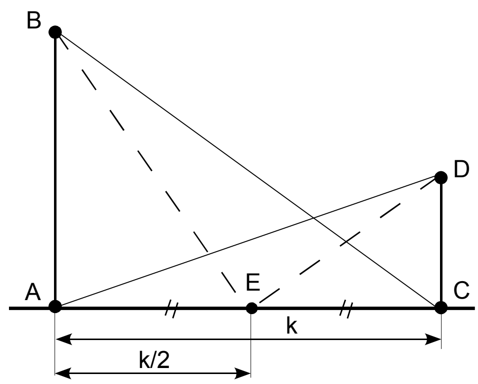
TRIGONOMETRIE ET CALCUL NUMERIQUE

1. Montrer que

$$\sin^4\frac{\pi}{8} + \sin^4\frac{3\pi}{8} + \sin^4\frac{5\pi}{8} + \sin^4\frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}$$

2. Résoudre l'équation
$$\cos 3x + \cos 7x = 1 + \cos 10x$$
Représenter les solutions entre 0 et 2π sur le cercle trigonométrique.

3. Deux églises sont situées de part et d'autre d'une place horizontale. Les clochers de ces deux églises sont représentés respectivement par les segments AB et CD. Les bases de ces clochers sont séparées d'une distance k. Un observateur placé au point C voit le sommet B du clocher opposé sous un angle BCA. De même, un observateur situé au point A voit le sommet D du clocher opposé sous un angle DAC valant la moitié de l'angle BCA. La somme des angles BEA et DEC sous lesquels un observateur placé au point E voit respectivement les sommets B et D est égale à 90°. Si la distance k vaut 60 m, déterminer la hauteur des deux clochers AB et CD.



Suggestion : exprimer d'abord DC et AB en fonction de k.

GEOMETRIE ET GEOMETRIE ANALYTIQUE

1. Soit un cercle $\mathcal{C}$ de centre O. Par un point P extérieur à $\mathcal{C}$, on mène deux tangentes à ce cercle, qui le rencontrent aux points de tangence Q et R.
   a) Démontrer que, dans le triangle PQR, la bissectrice issue de Q rencontre la droite OP en un point qui appartient à $\mathcal{C}$.
   b) On considère un cercle $\mathcal{C}'$ de centre extérieur à $\mathcal{C}$, et ne possédant aucun point commun avec $\mathcal{C}$.
   Si le point P parcourt le cercle $\mathcal{C}'$, le cercle $\mathcal{C}$ restant fixe, déterminer le lieu du centre du cercle inscrit au triangle PQR.

2. Dans un repère orthonormé de l'espace, on donne les droites d_a et d_b par leurs équations cartésiennes

$$d_a : \begin{cases} x - z - a = 0 \\ y + 3z + 1 = 0 \end{cases} \qquad d_b : \begin{cases} x + 2y + z - 2b = 0 \\ 3x + 3y + 2z - 7 = 0 \end{cases}$$

où a et b sont des paramètres réels.

a) Montrer que ces droites ne sont pas parallèles, quels que soient a et b.

b) Déterminer la condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que les droites soient concourantes.

c) Sous la condition déterminée au point précédent, déterminer alors une équation du plan contenant ces droites.

SEPTEMBRE 2014

ALGEBRE

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(1+z^2)^3 = (1-z^2)^3 .$$

2. Résoudre et discuter le système suivant, dans lequel a est un paramètre réel :

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$

ANALYSE

1. On considère la fonction

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + \alpha^2})$$

où $\alpha > 0$ est un paramètre réel.

a) Déterminer le domaine de définition de f.

b) Identifier les éventuels extrema locaux de f.

c) Identifier les éventuels points d'inflexion du graphe de f.

d) Déterminer toutes les valeurs de α pour lesquelles f est une fonction impaire.

2. Compte tenu de la résistance de l'air, la vitesse de chute d'un corps de masse m initialement abandonné sans vitesse est donnée par

$$v = \frac{mg}{c}\left[1 - \exp\left(-\frac{ct}{m}\right)\right]$$

où g désigne l'accélération de pesanteur, t est le temps et c est le coefficient de frottement fluide. Tous les paramètres sont strictement positifs.

a) Calculer la vitesse limite de chute, soit $v_\infty = \lim\limits_{t\to+\infty} v$ (en considérant m, g et c fixés).

b) Calculer la vitesse de chute lorsque la résistance de l'air devient négligeable, soit $v_0 = \lim\limits_{c\to 0} v$ (en considérant m, g et t fixés).

c) Calculer la vitesse de chute d'un corps très lourd, soit $v_m = \lim\limits_{m\to+\infty} v$ (en considérant c, g et t fixés).

3. Calculer les expressions suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx$

b) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x}\,dx$

c) $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x}}$ pour $x > 0$.

TRIGONOMETRIE ET CALCUL NUMERIQUE

1. Montrer que

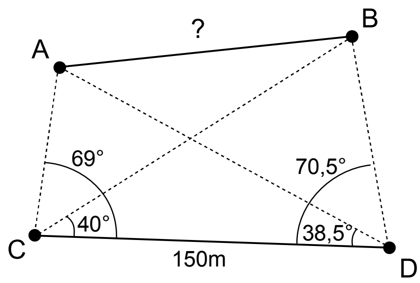
$$\sin\frac{\pi}{12}\,\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{1}{4}$$

2. Montrer que, si la relation suivante liant les trois angles A, B et C d'un triangle est vérifiée :

$$\sin A=\frac{\sin B+\sin C}{\cos B+\cos C}$$

alors, le triangle est rectangle en A.

3. Pour déterminer la distance entre 2 points inaccessibles A et B, on choisit une base d'opération CD longue de 150m et on mesure les angles $\widehat{BCD}=40°$, $\widehat{ACD}=69°$, $\widehat{ADC}=38.5°$ et $\widehat{BDC}=70.5°$. Calculer la distance AB (le dessin ci-dessous n'est pas à l'échelle !).



GEOMETRIE ET GEOMETRIE ANALYTIQUE

1. On considère deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ tangents en un point A, tels que $\mathcal{C}_1$ est intérieur à $\mathcal{C}_2$. Une droite issue de A rencontre $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ en deux points (distincts de A) notés respectivement P et Q. La tangente à $\mathcal{C}_1$ issue de P rencontre $\mathcal{C}_2$ en deux points notés R et S.

   a) Démontrer que la droite RS est parallèle à la tangente à $\mathcal{C}_2$ issue de Q.

   b) En déduire que la droite AQ est bissectrice de l'angle $\widehat{RAS}$.

2. Dans un repère orthonormé du plan, on donne la parabole d'équation cartésienne

$$y = (x+1)^2.$$

Déterminer le lieu des milieux des cordes découpées par la parabole sur les droites comprenant l'origine des axes.

EXAMENS DE 2015

Rappel
Les modalités de l'examen sont modifiées depuis 2014 : chaque épreuve écrite se trouve réduite à une durée de 2h30.

JUILLET 2015

ALGEBRE

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante

$$\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2-1}\ \leq\ x\,.$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^8-2z^4\cos a+1=0$$

dans laquelle a est un paramètre réel.

ANALYSE

1. La fonction arcth, appelée arctangente hyperbolique, peut être définie par

$$\operatorname{arcth}(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

Déterminer le domaine de définition de la fonction arcth, ses éventuelles asymptotes ainsi que les éventuels extrema et points d'inflexion de son graphe. Le cas échéant, déterminer l'équation de la tangente au(x) point(s) d'inflexion.
Sur base des résultats obtenus, esquisser le graphe de $\operatorname{arcth}(x)$.

2. Calculer

a) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x \, dx$

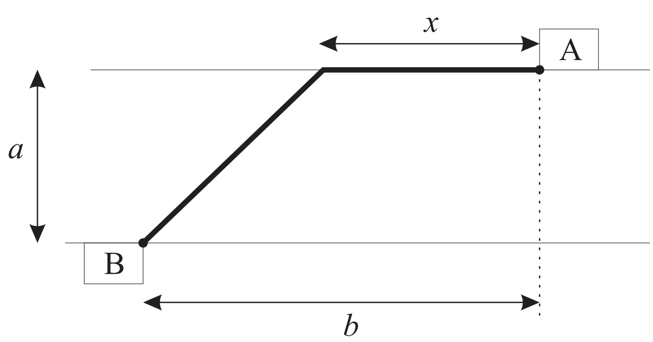
b) $\displaystyle\int \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \, dx$

c) $\displaystyle\int \sin^4 x \, dx$

d) $\displaystyle\int_0^1 (1-x^3) dx$

e) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx$

3. Une entreprise installée sur les deux rives d'un fleuve (voir dessin) souhaite relier par fibre optique ses deux bâtiments A et B. Le tracé prévu est composé de deux segments rectilignes. La première partie du câble traverse le fleuve et la seconde est posée sur la berge. La pose du câble sur la berge coûte α Euros par mètre. Le coût par mètre est double, soit 2α Euros par mètre, lorsque le câble est posé dans le fleuve.



On souhaite minimiser le coût de l'installation.

a) Déterminer la longueur x du câble à poser sur la berge pour minimiser le coût dans le cas où $a = 30$ m et $b = 240$ m.

b) Montrer que le câble doit relier les deux implantations en ligne droite lorsque $a \geq \sqrt{3}b$.

TRIGONOMETRIE ET CALCUL NUMERIQUE

1. Vérifier l'identité suivante

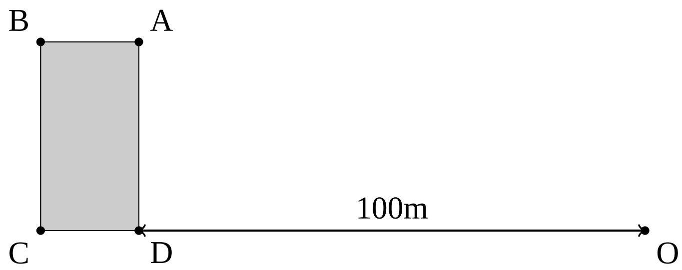
$$\frac{2}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) + \operatorname{cotg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$$

2. Résoudre l'équation suivante et représenter les solutions entre 0 et 2π sur le cercle trigonométrique

$$4\sin^3 x + 2\sin^2 x - 2\sin x = 1$$

3. Un observateur situé en O se trouve à une distance de 100 m d'un bâtiment $ABCD$ de forme rectangulaire dont la base CD mesure 20 m. Il mesure l'angle $\widehat{AOB}$ qui vaut 2°. Calculer la hauteur AD du bâtiment ainsi que l'aire du triangle AOB sachant que la hauteur du bâtiment ne peut dépasser 300 m.

   Les calculs seront effectués avec 4 chiffres significatifs.



GEOMETRIE ET GEOMETRIE ANALYTIQUE

1. Un point P appartient à la diagonale BD d'un carré $ABCD$. On note c la longueur de chacun des côtés de ce carré. Démontrer l'égalité

$$\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{DP} = ||\overrightarrow{AP}||^2 - c^2.$$

2. Soient ABC un triangle rectangle en A, et d une droite passant par A. On note G la projection orthogonale de B sur d, et E la projection orthogonale de C sur d. On note également d_1 la parallèle à AC menée par G, et d_2 la parallèle à AB menée par E.

   a) Démontrer que les droites d_1, d_2 et BC sont concourantes.

   b) Déterminer le lieu géométrique du point d'intersection de d_1 et de d_2 lorsque d varie.

SEPTEMBRE 2015

ALGEBRE

1. Résoudre le système suivant, dans lequel a est un paramètre réel

$$\begin{cases} \quad ax+y-z=-1 \\ -x+ay+z=-1 \\ \; ax+ay+z=a \end{cases}$$

2. On donne les matrices réelles

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \text{ et } X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & 3d \end{pmatrix},$$

où a,b,c et d sont des nombres réels, avec $d>c>0$.

On demande de déterminer $a,\ b,\ c$ et d sachant que

$$BA^{-1}X=C\,,\ 9a^2d^2+b^2c^2-6abcd=36 \text{ et } 2\log_2 c+\log_2 d=4\,.$$

ANALYSE

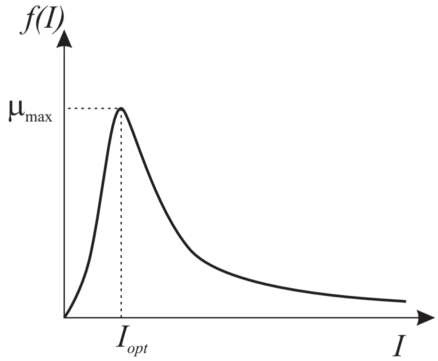
1. La fonction arch, appelée arccosinus hyperbolique, peut être définie par

$$\operatorname{arch}(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right).$$

Déterminer le domaine de définition de la fonction arch, ses éventuelles asymptotes ainsi que les éventuels extrema, points d'inflexion et points à tangente verticale de son graphe.

Sur base des résultats obtenus, esquisser le graphe de $\operatorname{arch}(x)$, en illustrant bien la concordance avec les résultats préalables.

2. Par une série d'expériences réalisées dans des conditions d'éclairement contrôlées, on détermine que le taux de croissance d'une variété de légumineuse peut être décrit par la fonction $f(I)$ de l'éclairement I dont l'allure est représentée graphiquement ci-dessous.



Le taux de croissance
   i. est positif,
   ii. est nul sous un éclairement nul,
   iii. est maximum et vaut μ_{max} (connu) pour un éclairement optimum I_{opt} (connu),
   iv. tend vers zéro si l'éclairement tend vers l'infini.

Déterminer toutes les fonctions de la forme

$$f(I) = \frac{\alpha + \beta I}{1 + \delta I + \varepsilon I^2}$$

permettant de traduire la dépendance du taux de croissance en l'éclairement I en exprimant les constantes apparaissant dans cette expression en fonction des paramètres μ_{max}, I_{opt} positifs mesurés expérimentalement.
Veiller à simplifier le résultat au maximum.

3. On considère les intégrales

$$I_n = \int_0^1 \frac{x}{1+x^n} \mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{Q}.$$

   a) Calculer I_0, $I_{1/2}$, I_1, I_2 et I_4.
   b) Montrer que

$$I_n \leq I_{n+1} \leq \frac{1}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

TRIGONOMETRIE ET CALCUL NUMERIQUE

1. Si A, B et C désignent les sommets d'un triangle quelconque, vérifier l'identité suivante

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\ \sin A\ \sin B\ \sin C$$

2. Résoudre l'équation suivante

$$\cos nx + \cos (n-2)\, x = \cos x$$

Tracer les solutions entre 0 et 2π sur le cercle trigonométrique dans le cas particulier où $n = 5$.

3. Soit la surface S (surface grisée sur la figure 1 ci-dessous) délimitée par la corde AB et l'arc de cercle qu'elle intercepte.

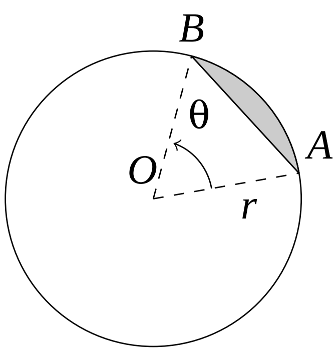


FIGURE 1 - r désigne le rayon du cercle et θ représente l'angle d'ouverture de l'arc intercepté exprimé en radians.

a) Démontrer que l'aire de cette surface vaut $S = \dfrac{1}{2} r^2 (\theta - \sin\theta)$

b) Sur base de la formule donnée au point précédent, calculer la surface de l'intersection de deux cercles respectivement de rayons 10 cm et 7 cm dont les centres A et B sont distants de 12 cm (cf. figure 2).

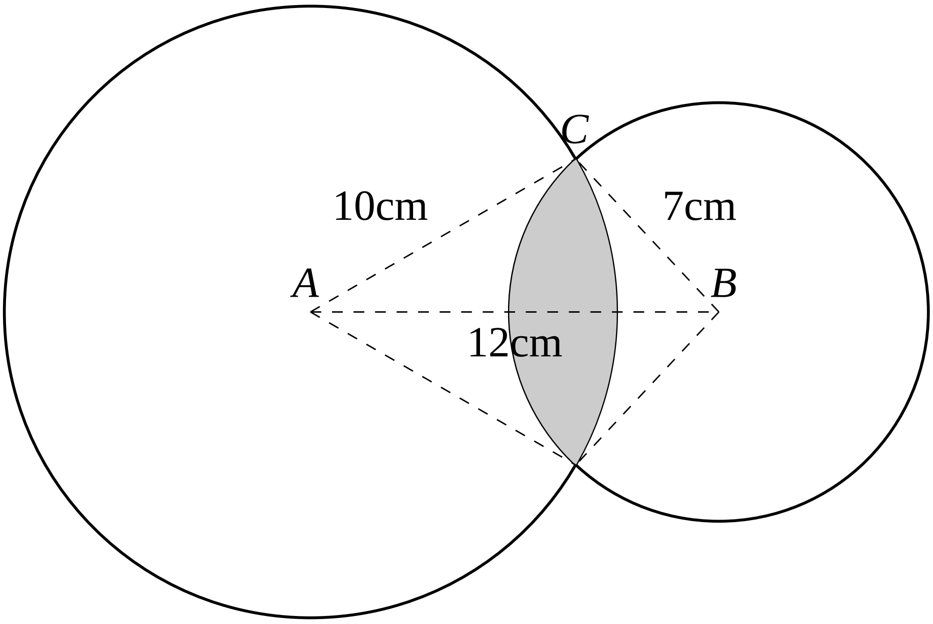


FIGURE 2 - L'intersection des deux cercles est représentée par la surface grisée.

GEOMETRIE ET GEOMETRIE ANALYTIQUE

1. On considère deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ se coupant en deux points distincts A et B. On note P le point diamétralement opposé à A sur $\mathcal{C}$, et P' le point diamétralement opposé à A sur $\mathcal{C}'$.

   Démontrer que les points P, B et P' sont alignés.

2. Dans un repère orthonormé (O,X,Y), on considère une parabole $\mathcal{P}_1$ d'axe Y dont le sommet est l'origine O et dont tous les points ont une ordonnée positive ou nulle. On considère aussi la parabole $\mathcal{P}_2$, translatée de $\mathcal{P}_1$, de sommet au point de coordonnées $(4,0)$. Les paraboles $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont telles que leurs tangentes respectives à leur point d'intersection sont orthogonales. On demande de déterminer les équations cartésiennes de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

EXAMENS DE 2016

Rappel
Les modalités de l'examen sont modifiées depuis 2014 : chaque épreuve écrite se trouve réduite à une durée de 2h30.

JUILLET 2016

ALGEBRE

1. Factoriser dans $\mathbb{R}$ le polynôme x^8+4.

2. Résoudre le système suivant, dans lequel m est un paramètre réel :

$$\begin{cases} mx+y=m+1 \\ m^3x+(2m-1)y=m^3+1 \end{cases}$$

ANALYSE

1. Soit la fonction
$$f(x)=\frac{x^2-a^2}{x^3-a^3}$$
où a représente un paramètre réel non nul.

   En discutant s'il y a lieu en fonction de a,

   a) déterminer le domaine de définition de la fonction f et ses éventuelles asymptotes ;
   b) étudier la croissance/décroissance de f et caractériser ses éventuels extrema ;
   c) sur base des informations recueillies, esquisser le graphique de f.

2. a) Calculer

$$I_0 = \int \ln x \, \mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad I_1 = \int x \ln x \, dx$$

b) Pour tout $\ell \in]0,1[$, on définit

$$J_n(\ell) = \int_\ell^1 x^n \ln x \, dx \qquad \text{où} \quad n \in \mathbb{N}$$

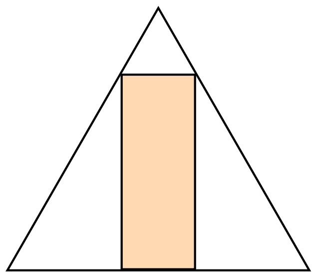
Calculer

$$\lim_{\ell \to 0^+} J_n(\ell)$$

c) Calculer

$$\int_0^1 x \sqrt{1-x^2} \, dx$$

3. On inscrit un rectangle dans un triangle équilatéral en faisant en sorte qu'un côté du rectangle s'appuie sur un côté du triangle comme illustré ci-dessous.
Quelle est la fraction maximale de la surface du triangle qui peut être ainsi recouverte ?



TRIGONOMETRIE ET CALCUL NUMERIQUE

1. Trouver toutes les valeurs de x pour lesquelles l'égalité suivante est vérifiée :

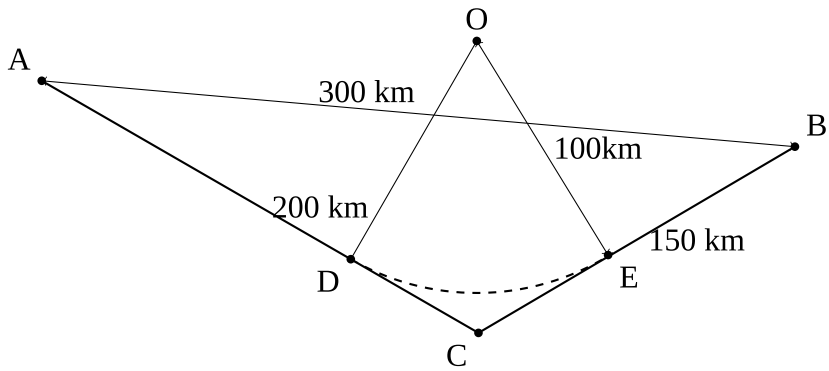
$$\sin 5x + \sin x + 2\sin^2 x = 1$$

Présenter sur le cercle trigonométrique celles appartenant à l'intervalle $[-\pi, \pi[$.

2. Si A, B et C désignent les angles d'un triangle et a, b et c les longueurs des côtés opposés à ces angles, montrer que :

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{C}{2}}$$

3. Deux lignes de chemin de fer relient en ligne droite les villes A et B distantes de 300 km par l'intermédiaire d'une ville C. Les villes A et B se trouvent respectivement à une distance de 200 km et 150 km de la ville C. Pour diminuer le temps de trajet entre les villes A et B, on désire éviter de passer par la ville C et raccorder les deux lignes de chemin de fer par une courbe en arc de cercle de 100 km de rayon tangente aux droites AC et CB aux points D et E comme représenté sur la figure ci-dessous.



Quelle est la longueur de la nouvelle ligne à construire (arc DE) ? Quelle sera la distance ($ADEB$) à parcourir pour rejoindre les villes A et B par cette nouvelle ligne ? Calculer la surface DCE du terrain situé entre l'ancienne ligne et la nouvelle ligne.

GEOMETRIE ET GEOMETRIE ANALYTIQUE

1. Par un point P intérieur à un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon r, on mène deux droites perpendiculaires d_1 et d_2. On note A_1 un des points d'intersection de d_1 avec $\mathcal{C}$, et A_2 un des points d'intersection de d_2 avec $\mathcal{C}$. Le milieu de la corde $[A_1A_2]$ est noté M. Démontrer l'égalité
$$|OM|^2 + |PM|^2 = r^2,$$
où $|XY|$ dénote la longueur du segment $[XY]$.

2. On donne une droite d tangente à un cercle $\mathcal{C}$, et on considère le lieu des points dont la distance à $\mathcal{C}$ est égale à la distance à d. On demande de caractériser ce lieu à l'aide d'équations cartésiennes, de préciser la nature de celui-ci, et de le représenter graphiquement.

SEPTEMBRE 2016

ALGEBRE

1. Un polynôme réel $f(x)$ et son polynôme dérivé $f'(x)$ s'annulent tous les deux en $x = 2$. Montrer que $f(x)$ est un multiple de $(x-2)^2$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$\frac{1}{4x^2 - 8x + 3} \leq \frac{2}{4x^2 - 8x + 4}.$$

ANALYSE

1. Soit la fonction
$$f(x) = \ln \frac{a^2 + x^2}{ax}$$
où a représente un paramètre réel strictement positif.

   En discutant s'il y a lieu en fonction de a,

   a) déterminer le domaine de définition de la fonction f et ses éventuelles asymptotes ;
   b) étudier la croissance/décroissance de f et caractériser ses éventuels extrema ;
   c) étudier la concavité de f et identifier ses éventuels points d'inflexion ;
   d) sur base des informations recueillies, esquisser le graphique de f.

2. On considère les intégrales du type

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n \theta \, d\theta \qquad \text{où} \qquad n \in \mathbb{N}$$

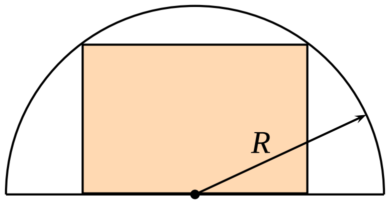
   a) Calculer I_0, I_1, I_2 et I_3.
   b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

c) Utiliser les résultats ci-dessus pour calculer

$$I_7 = \int_0^{\pi/2} \sin^7\theta \, d\theta$$

3. On inscrit un rectangle dans un demi-cercle de rayon R en faisant en sorte qu'un côté du rectangle s'appuie sur le diamètre du demi-cercle comme illustré ci-contre.
Quelle est la fraction maximale de la surface du demi-cercle qui peut être ainsi recouverte ?



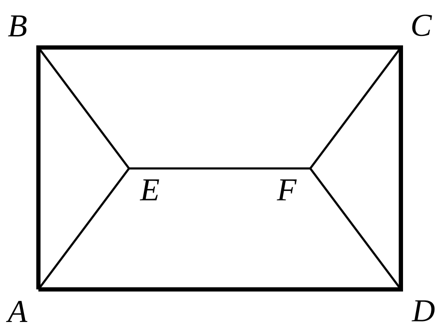
TRIGONOMETRIE ET CALCUL NUMERIQUE

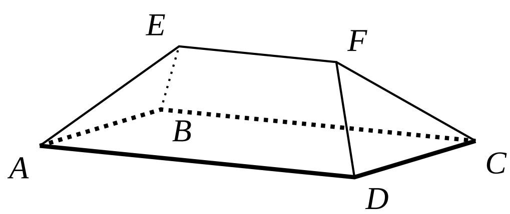
1. Résoudre l'équation trigonométrique suivante en précisant les conditions d'existence :

$$\frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\operatorname{tg} x + \sin x} = 2 - 2\cos x$$

Représenter les solutions appartenant à l'intervalle $[-\pi, \pi[$ sur le cercle trigonométrique.

2. On souhaite couvrir la toiture à quatre pans représentée en vue de haut et en perspective sur la figure suivante. La base de la toiture est rectangulaire, de côtés $AB = 8m$ et $BC = 12m$. La toiture est symétrique, c'est-à-dire que les pans ABE et CDF sont isométriques, de même que les pans $BCFE$ et $ADFE$. En mesurant les arêtes principales de la toiture, on obtient que $AE = 6m$, $EF = 6m$ et $FD = 6m$.





a) Calculer la surface totale de la toiture à couvrir.

b) Calculer la hauteur de l'arête EF par rapport à la base rectangulaire.

c) On souhaite poser des panneaux photovoltaïques sur la toiture. Pour ce faire, une inclinaison entre 30 ° et 40 ° est souhaitée. Déterminer quel pan de la toiture est le plus approprié pour accueillir les panneaux.

3. Si A, B et C désignent les angles d'un triangle et a, b et c les longueurs des côtés opposés à ces angles, montrer que :

$$\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{a+b+c}{2a}\sin\frac{A}{2}$$

GEOMETRIE ET GEOMETRIE ANALYTIQUE

1. On considère un triangle ABC et un point arbitraire P appartenant au côté $[BC]$ et distinct de B et C. Démontrer que l'on a

$$\frac{|AB|^2}{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BP}}+\frac{|AC|^2}{\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CP}}+\frac{|AP|^2}{\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PB}}=1,$$

où $|XY|$ dénote la longueur du segment $[XY]$.

2. On donne une droite d passant par le centre d'un cercle $\mathcal{C}$, et on considère le lieu des centres des cercles qui sont à la fois tangents à d et tangents extérieurement à $\mathcal{C}$. On demande de caractériser ce lieu à l'aide d'équations cartésiennes, de préciser la nature de celui-ci, et de le représenter graphiquement.

EXAMENS DE 2017

Rappel
Les modalités de l'examen sont modifiées depuis 2014 : chaque épreuve écrite se trouve réduite à une durée de 2h30.

JUILLET 2017

ALGEBRE

1. Calculer la valeur de l'expression

$$E = \sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha .$$

   Suggestion. On peut voir dans l'expression à évaluer la partie imaginaire d'une autre expression facile à calculer.

2. Déterminer l'ensemble des valeurs (réelles) de a pour lesquelles l'énoncé

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x\text{, si } x \geq a \text{ alors } x^2 - ax + 2 - a \geq 0}$$

   est vrai.

ANALYSE

1. La fonction coth, appelée cotangente hyperbolique, peut être définie par

$$\coth x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}$$

   a) Déterminer son domaine de définition.
   b) Déterminer sa parité éventuelle.

c) Déterminer les éventuelles asymptotes de son graphe.

d) Étudier la croissance/décroissance de coth et caractériser ses éventuels extrema.

e) Étudier la concavité du graphe et déterminer ses éventuels points d'inflexion.

f) Esquisser le graphe de coth.

g) Sans calcul supplémentaire, esquisser le graphe de la fonction réciproque de la fonction coth. Préciser son domaine de définition.

2. Calculer les intégrales et primitives suivantes où R est une constante strictement positive.

   a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx$

   b) $\displaystyle\int x\sqrt{R^2 - x^2}\, dx$

   c) $\displaystyle\int \sqrt{R^2 - x^2}\, dx$

3. Une citerne à gaz en tôle a la forme d'un cylindre à base circulaire de rayon r soudé à deux demi-sphères de même rayon.

   Sachant que le prix de la tôle est de γ euros par mètre carré et que le prix de la soudure (aux jonctions entre le cylindre et les demi-sphères) est de $\gamma\,\ell$ euros par mètre, où γ et ℓ sont des constantes strictement positives, montrer qu'il existe un rayon optimum r^* permettant de minimiser le coût de réalisation de cette citerne pour un volume $V = 2\pi\ell^3/3$ donné.

   Exprimer r^* en fonction de ℓ.

TRIGONOMETRIE ET CALCUL NUMERIQUE

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$2\sin(2x) + \cos(2x) = 2\sin^2 x + 3\,\mathrm{tg}\, x$$

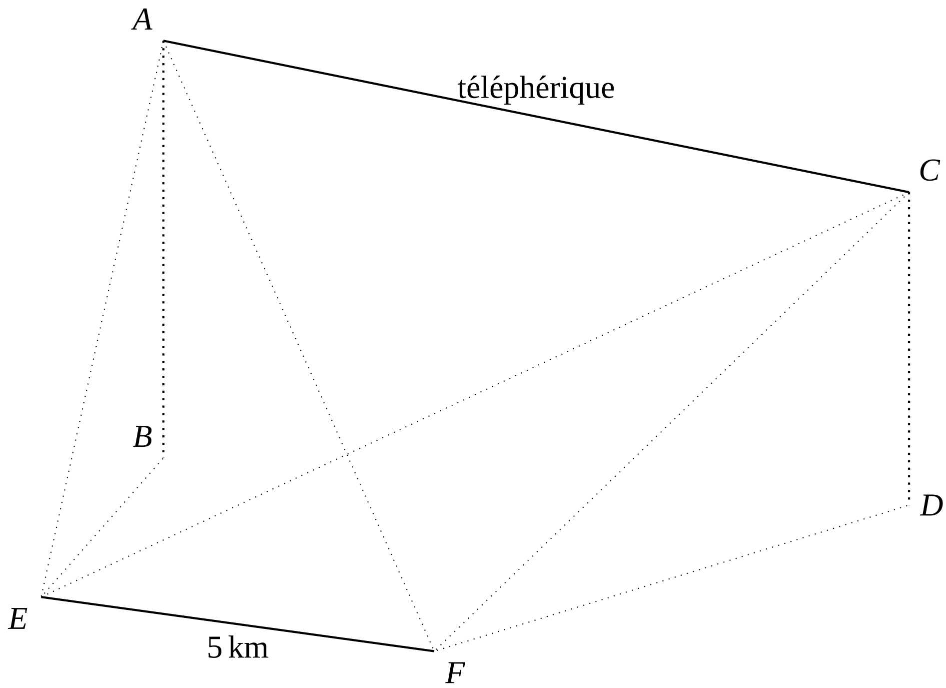
   et représenter les solutions comprises entre $-\pi$ et π sur le cercle trigonométrique.

2. A, B et C désignant les mesures des angles d'un triangle non dégénéré, montrer que, si

$$\mathrm{tg}\, B = \frac{\sin C}{1 - \cos C},$$

alors le triangle est isocèle.

3. On désire relier les sommets A et C de deux collines par un téléphérique. Afin de déterminer l'ampleur des travaux, des mesures topographiques sont effectuées à partir de deux points E et F distants de 5 km et situés tous deux dans un même plan d'observation horizontal. Les points B et D représentent respectivement les bases des sommets A et C dans le plan d'observation. Les angles $\widehat{AFE}$, $\widehat{AEF}$ et $\widehat{AEB}$ valent respectivement 12.3672°, 157.1063° et 5.8750° et les angles $\widehat{CFE}$, $\widehat{CEF}$ et $\widehat{CFD}$ valent respectivement 80.2493°, 68.9063° et 3.1996°.



   a) Calculer la hauteur des sommets des deux collines par rapport au plan d'observation (longueur des segments $[A,B]$ et $[C,D]$).
   b) Calculer la distance entre les deux sommets (longueur du segment $[A,C]$)

GEOMETRIE ET GEOMETRIE ANALYTIQUE

1. On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O. Sur un diamètre de ce cercle, on fixe deux points distincts P et P' équidistants de O. Un point M mobile parcourt $\mathcal{C}$. Démontrer que le produit scalaire $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{P'M}$ reste constant.

2. On donne un trapèze $ABCD$, avec $AB \parallel CD$. Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ de ce trapèze sont de même longueur et se coupent à angle droit. Leur intersection est notée I.

   a) Démontrer que les segments $[AI]$ et $[BI]$ sont de même longueur.

   b) Calculer $|AD|^2 + |DC|^2 + |CB|^2 + |AB|^2$ en fonction de $|AD|$.

   c) Si l'on note M le milieu de $[AD]$, démontrer que IM est perpendiculaire à BC.

SEPTEMBRE 2017

ALGEBRE

1. Résoudre le système suivant, dans lequel a est un paramètre réel :

$$\begin{cases} ax + (a+1)y + (a+2)z = a \\ (a-1)x + (a+3)y + (a+1)z = a-1 \\ (a+2)x - y + (2a+2)z = 4 \end{cases}$$

2. Décomposer dans $\mathbb{C}$ le polynôme $z^4 + 1$ en un produit du type

$$(z^2 + b_1 z + c_1)(z^2 + b_2 z + c_2)\,.$$

   Si plusieurs possibilités existent, on les donnera toutes.

ANALYSE

1. On considère la fonction

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}(x^2 + a)$$

   où a désigne un paramètre réel strictement positif. En discutant s'il y a lieu en fonction de la valeur de a,

   a) déterminer le domaine de définition de f ;

   b) déterminer sa parité éventuelle ;

c) déterminer les éventuelles asymptotes du graphe de f ;

d) étudier la croissance/décroissance de f et caractériser ses éventuels extrema ;

e) esquisser le graphe de f.

2. On considère les intégrales

$$S_n = \int_0^{\pi/2} x^n \sin x \, dx \qquad \text{et} \qquad C_n = \int_0^{\pi/2} x^n \cos x \, dx$$

a) Calculer C_0.

b) Calculer S_1.

c) Montrer que, pour tout $n > 0$,

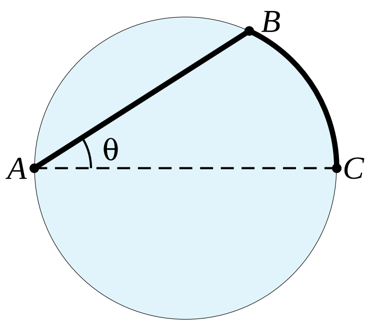
$$C_n = \alpha^n - nS_{n-1}$$

où α désigne une constante à déterminer.

d) De ce qui précède, déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^1 \left(\arcsin x\right)^2 dx$.

3. Un canard se trouvant en A au bord d'un lac circulaire de rayon R souhaite atteindre le point C diamétralement opposé du lac. Pour ce faire, il peut nager en ligne droite de A à C, marcher le long de la berge de A à C ou nager en ligne droite depuis son point de départ jusqu'à un point intermédiaire B situé sur la berge puis marcher le long du bord de B à C (voir figure).

Sachant que ce canard marche deux fois plus vite qu'il ne nage, déterminer la trajectoire la plus rapide pour atteindre le point C. Justifier.

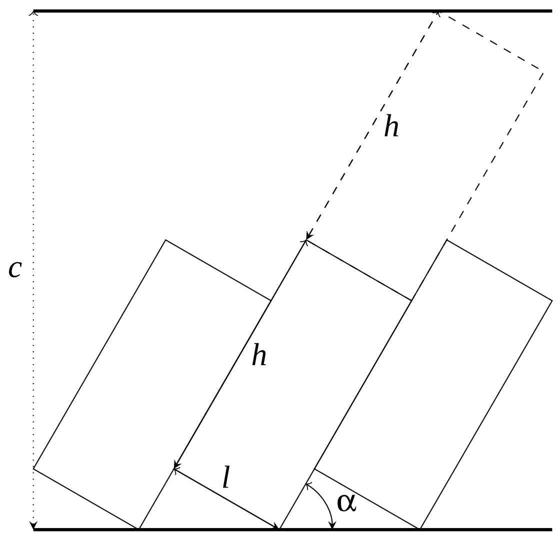


TRIGONOMETRIE ET CALCUL NUMERIQUE

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$
$$2\sin^2 x \operatorname{cotg} x + \sin(3x) + \sin x = 0$$
en spécifiant les conditions d'existence et représenter les solutions comprises dans $[-\pi, \pi[$ sur le cercle trigonométrique.

2. Soient A, B et C les trois angles d'un triangle non dégénéré. Montrer que, si
$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2,$$
alors le triangle correspondant est rectangle.

3. On désire installer des emplacements de stationnement de voitures dans une rue de largeur c. Chaque emplacement doit posséder une largeur l de 2.3 m, une profondeur h de 5 m et doit comprendre une surface de dégagement au moins égale à la surface de l'emplacement de stationnement pour permettre la sortie du véhicule. La situation est représentée à la figure ci-dessous où l représente la largeur de l'emplacement de stationnement, h sa profondeur et α l'angle d'inclinaison de l'emplacement avec le bord de la route. La surface de dégagement est représentée en pointillé.
   (a) Calculer la largeur minimale c de la route permettant d'installer les emplacements de stationnement si l'angle d'inclinaison α est de 60°.
   (b) Calculer la valeur maximale de l'angle d'inclinaison α permettant l'installation des emplacements de stationnement si la largeur de la route c vaut 8.7 m.



GEOMETRIE ET GEOMETRIE ANALYTIQUE

1. On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O, et un parallélogramme $ABCD$ dont l'intersection des diagonales coïncide avec O. Un point M mobile parcourt $\mathcal{C}$. Démontrer que la valeur de
$$|MA|^2 + |MB|^2 + |MC|^2 + |MD|^2$$
reste constante.

2. Sur les côtés $[OA]$ et $[OB]$ d'un triangle rectangle en O, à l'extérieur de celui-ci, on construit les triangles équilatéraux OAC et OBE. Les milieux des segments $[OA]$ et $[OB]$ sont respectivement notés A' et B'.
   Démontrer que la hauteur du triangle OAB issue de O et les droites $A'E$ et $B'C$ sont concourantes.

EXAMENS DE 2018

Rappel
Les modalités de l'examen sont modifiées depuis 2014 : chaque épreuve écrite se trouve réduite à une durée de 2h30.

JUILLET 2018

ALGEBRE

1. Résoudre l'inéquation suivante dans $\mathbb{R}$:

$$|x+1|+|x-2|<3\,.$$

2. a) A quelles conditions sur les paramètres réels a, b et c le polynôme

$$X^4+aX^2+bX+c$$

   est-il divisible par X^2+X+1 ?

   b) A quelle condition sur les paramètres réels p et q le polynôme

$$X^3+pX+q$$

   admet-il une racine double ? Cette racine est-elle toujours réelle ?

ANALYSE

1. On considère la fonction

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x-a}$$

   où a désigne un paramètre réel strictement positif.

   En discutant s'il y a lieu en fonction de la valeur de a,

a) déterminer le domaine de définition de f ;

b) déterminer sa parité éventuelle ;

c) déterminer les éventuelles asymptotes de son graphique ;

d) étudier la croissance/décroissance de f et caractériser ses éventuels extrema ;

e) esquisser le graphique de f.

2. Soit

$$I_n = \int_1^{\sqrt{e}} x \left(\ln x^2\right)^n dx$$

a) Calculer I_0.

b) Calculer I_1.

c) Montrer que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, il existe une constante α telle que

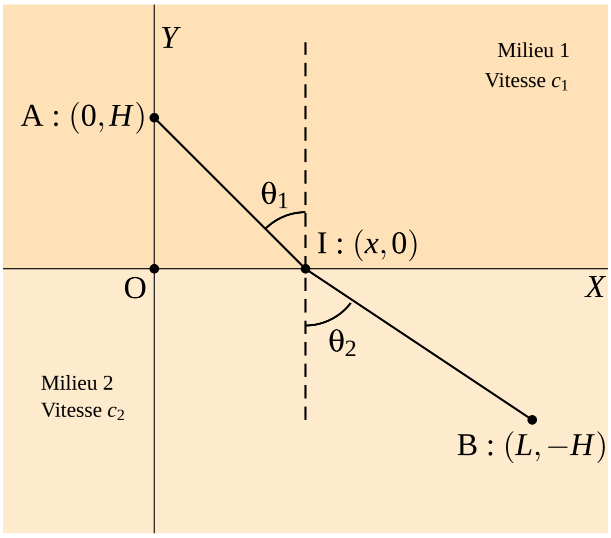
$$I_n = \frac{1}{2}\int_1^{\alpha} (\ln x)^n dx$$

d) Montrer que, quel que soit $n \in \mathbb{N}_0$, $\quad I_n = \dfrac{e}{2} - n\, I_{n-1}$.

3. Pour aller d'un point à un autre, la lumière suit le chemin le plus rapide. Lorsque le milieu est homogène et que la vitesse de propagation de la lumière est donc constante, le rayon lumineux suit une trajectoire rectiligne entre les deux points. Dans ce cas, le chemin le plus rapide est également le plus court. Dans un milieu non homogène, par contre, le chemin le plus rapide ne correspond pas nécessairement au chemin le plus court de sorte que la propagation n'a pas lieu en ligne droite.

La loi de la réfraction de Snell-Descartes peut être obtenue par application de ce principe. Pour établir cette loi, on considère deux milieux homogènes séparés par une interface plane d'équation $y = 0$. Dans les deux milieux, la lumière se propage en ligne droite à des vitesses c_1 et c_2. Au passage de l'interface plane entre les deux milieux, le rayon est réfracté et change de direction.

On considère en particulier le rayon lumineux allant du point A de coordonnées $(0,H)$ au point B de coordonnées $(L,-H)$ où H et L sont des constantes strictement positives. Ce problème est donc caractérisé par les quatre paramètres H, L, c_1 et c_2. On note également $x \in \mathbb{R}$, la coordonnée horizontale du point I où le rayon est incident à l'interface.



a) Exprimer en fonction de x et des quatre paramètres du problème le temps de parcours du rayon lumineux allant du point A au point B.

b) Montrer qu'il est nécessaire que le trajet du rayon lumineux soit tel que (voir figure)

$$\frac{\sin\theta_1}{c_1} = \frac{\sin\theta_2}{c_2}$$

TRIGONOMETRIE ET CALCUL NUMERIQUE

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation homogène

$$\sin^3 x + 2\cos^3 x = 3\sin^2 x \cos x$$

et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

Les solutions trouvées ne sont pas toutes exprimables sous la forme d'angles remarquables. Il n'empêche qu'il est possible de les représenter de façon précise sur le cercle trigonométrique sachant que $\sqrt{3} \simeq 1.732$.

2. Si A, B et C sont les mesures des angles d'un triangle quelconque non dégénéré, montrer que

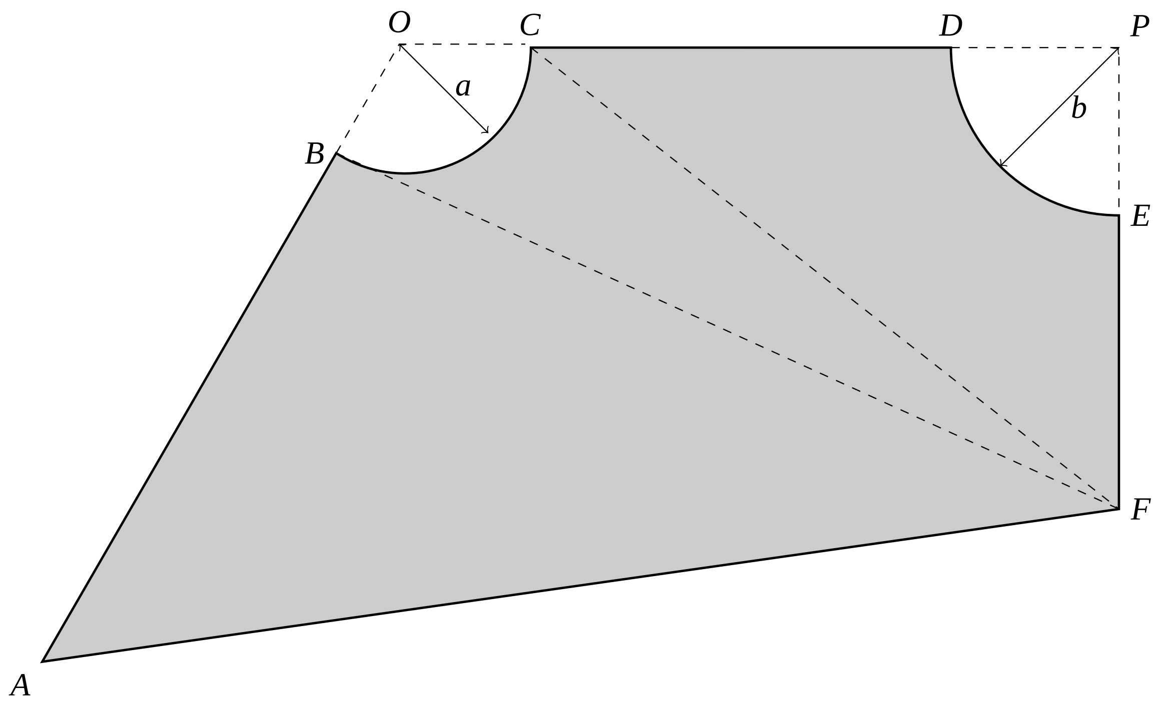
$$\sin^2 A + \sin^2 B + \cos^2 C = 1 + 2\sin A \sin B \cos C.$$

3. Dans le cas d'un quadrilatère plan quelconque, la connaissance de la longueur des quatre côtés et d'une diagonale suffit pour déterminer sa surface. Cependant, on désire ici carreler une pièce $ABCDEF$ dont la forme est celle représentée par la zone grisée de la figure ci-dessous. Les courbes BC et DE sont des arcs de cercle de centre O et P et de rayon a et b respectivement. Les segments rectilignes $[A,B]$, $[C,D]$, $[E,F]$ et $[A,F]$ mesurent respectivement 7 m, 5 m, 3.5 m et 12.64 m. Les deux segments $[B,F]$ et $[C,F]$ mesurent 10.11 m et 8.90 m. De plus, l'angle $\widehat{CPF}$ est droit. On demande de

   a) déterminer le rayon b de l'arc DE,

   b) déterminer le rayon a de l'arc BC,

   c) calculer l'aire intérieure de la pièce représentée par la surface grisée $ABCDEF$.



GEOMETRIE ET GEOMETRIE ANALYTIQUE

1. On donne quatre points de l'espace A, B, C et D.

   a) Montrer que le vecteur

$$2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} - 3\overrightarrow{MD}$$

   est indépendant du point M.

b) Notons $\mathbf{v}$ le vecteur dont il est question au point précédent. Montrer que, si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, alors la valeur de

$$2\|\overrightarrow{MA}\|^2 - \|\overrightarrow{MB}\|^2 + 2\|\overrightarrow{MC}\|^2 - 3\|\overrightarrow{MD}\|^2,$$

où $\|\overrightarrow{XY}\|$ désigne la norme du vecteur $\overrightarrow{XY}$, est indépendante du point M.

2. Un segment de longueur constante se déplace dans le plan, de manière telle que ses extrémités A et B s'appuient sur les deux côtés d'un angle droit donné.
On demande
   a) de déterminer le lieu d'un point P quelconque du segment (en précisant la nature de ce lieu),
   b) de représenter graphiquement ce lieu lorsque P est le milieu du segment.

SEPTEMBRE 2018

ALGEBRE

1. Résoudre le système suivant, dans lequel a est un paramètre réel :

$$\begin{cases} x + ay + a^2 z = 1\,, \\ x + ay + az = a\,, \\ ax + a^2 y + a^3 z = a^3\,. \end{cases}$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^3 + (\operatorname{cis}\theta)^2 |z| = 0\,,$$

dans laquelle θ est un paramètre réel.
Quel est l'ensemble des valeurs possibles de $|z|$?
Donner la forme algébrique des solutions éventuelles dans le cas $\theta = 0$.

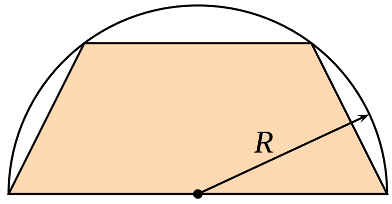
Rappel. L'expression $\operatorname{cis}\theta$ est une abréviation de $(\cos\theta + i\sin\theta)$.

ANALYSE

1. On considère la fonction
$$f(x) = \ln \frac{x}{a^3 - x^3}$$
où a désigne un paramètre réel strictement positif.
   a) Déterminer le domaine de définition de f.
   b) Déterminer la parité éventuelle de f.
   c) Déterminer les éventuelles asymptotes de son graphique.
   d) Étudier la croissance/décroissance de f et caractériser ses éventuels extrema.
   e) Étudier la concavité du graphique de f et identifier ses éventuels points d'inflexion.
   f) Esquisser le graphique de f.

2. Evaluer chacune des expressions ci-dessous :
   a)
$$\int_0^{\pi} x\, dx$$
   b)
$$\int x \sin x\, dx$$
   c)
$$\int_0^{\pi} x \sin^2 x\, dx$$
   d)
$$\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$$

3. On inscrit un trapèze dans un demi-cercle de rayon R en faisant en sorte qu'une base du trapèze s'appuie sur le diamètre du demi-cercle comme illustré ci-dessous.
Quelle est la fraction maximale de la surface du demi-cercle qui peut être ainsi recouverte ?



TRIGONOMETRIE ET CALCUL NUMERIQUE

1. Résoudre l'équation trigonométrique suivante

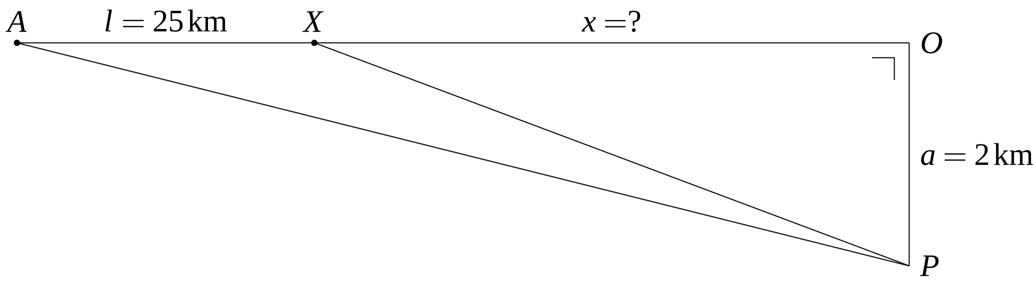
$$\sin x - 2\sin 3x + \sin 5x = -\cos 2x + \cos 4x$$

et représenter les solutions appartenant à l'intervalle $[-\pi, +\pi[$ sur le cercle trigonométrique.

2. Montrer que si A, B, C sont trois angles strictement positifs tels que $A+B+C = \frac{\pi}{2}$ alors

$$\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} A \operatorname{tg} C = 1.$$

3. Un observateur situé en O dans un désert parfaitement plan est aligné avec deux éléments remarquables A et X séparés entre eux par une distance $l = 25\,\text{km}$. Cet observateur cherche à déterminer la distance qui le sépare du point X en se déplaçant en P d'une distance $a = 2\,\text{km}$ dans une direction perpendiculaire à l'axe AXO. De ce nouveau point de vue, il mesure l'angle $\widehat{XPA} = 1°6'0''$.



a) Déterminer l'angle $\widehat{PAO}$.

b) Calculer la distance x entre les points O et X.

c) Calculer la distance $\overline{PA}$.

Les angles seront calculés à la seconde près et les distances avec 5 chiffres significatifs.

GEOMETRIE ET GEOMETRIE ANALYTIQUE

1. Soient deux droites perpendiculaires X, Y, sécantes en O. Sur X, on fixe les points A et B de telle sorte que l'on ait $\overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{OB}$. Pour tout $P \in Y$, on définit le point Q tel que $3\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP}$.

   Quel est le lieu du ou des point(s) commun(s) aux droites AP et BQ lorsque P parcourt Y ?

2. Dans un repère orthonormé de l'espace, on donne les droites d_a et d_b par leurs équations cartésiennes

$$d_a : \begin{cases} x - z - a = 0 \\ y + 3z + 1 = 0 \end{cases} \qquad d_b : \begin{cases} x + 2y + z - 2b = 0 \\ 3x + 3y + 2z - 7 = 0 \end{cases}$$

   où a, b sont des paramètres réels.

   a) Montrer que ces droites ne sont pas parallèles, quels que soient a et b.

   b) Déterminer la condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que ces droites soient sécantes.

   c) Sous la condition déterminée au point précédent, déterminer alors une équation cartésienne du plan contenant ces droites.

Université de Liège
Faculté des Sciences Appliquées
Institut de Mathématique - Bât. B37
Quartier Polytech 1
Allée de la Découverte, 12
4000 - LIEGE 1

Tél. : 04/366.94.36. Fax : 04/366.95.75.

http ://www.ulg.ac.be