Université de Liège
Examen d'admission aux études de bachelier ingénieur civil et architecte

Trigonométrie et calcul numérique

Prof. P. Dewallef et Prof. Q. Louveaux

Juillet 2020

Question 1 *Trouvez toutes les solutions de l'équation trigonométrique suivante*

$$3\left(\sin(x)+\cos(x)\right)-4\left(\sin^3(x)+\cos^3(x)\right)=0.$$

Tracez les solutions sur le cercle trigonométrique.

Solution

Soit on remplace $\sin^2 x$ par $(1-\cos^2 x)$ (resp. $\cos^2 x$ par $(1-\sin^2 x)$) et on obtient

$$3\left(\sin x+\cos x\right)-4\left(\sin x-\sin x\cos^2 x+\cos x-\cos x\sin^2 x\right)=0,$$

puis on met en évidence $(\sin x+\cos x)$ dans les différents termes.
Soit on met directement $(\sin x+\cos x)$ en évidence dans l'équation de départ, ce qui donne

$$(\sin x+\cos x)\left[3-4\left(\sin^2 x+\cos^2 x-\sin x\cos x\right)\right]=0.$$

Dans un cas comme dans l'autre, on obtient une forme factorisée de l'équation :

$$\boxed{(\sin x+\cos x)\left(4\sin x\cos x-1\right)=0.}$$

On a donc d'une part les solutions

$$\sin x=-\cos x \quad \rightarrow \boxed{x=\frac{3\pi}{4}+k\pi\ ,\ k\in Z}$$

Et d'autre part

$$2\sin x\cos x=\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{\sin(2x)=\frac{1}{2}},$$

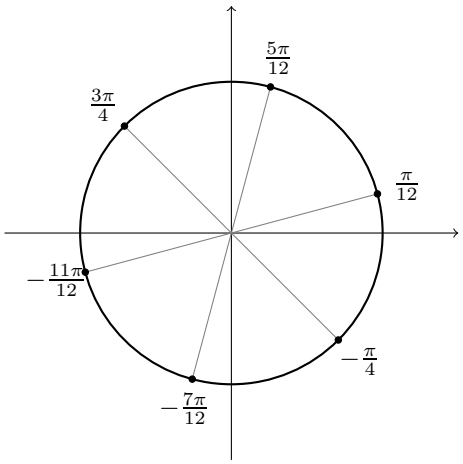
qui donne

$$2x = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ , \ k \in Z \\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \ , \ k \in Z \end{cases}$$

et finalement

$$\boxed{x = \begin{cases} \frac{\pi}{12} + k\pi \ , \ k \in Z \\ \frac{5\pi}{12} + k\pi \ , \ k \in Z \end{cases}}$$

Représentation sur le cercle trigonométrique



Question 2 *A un instant initial, deux observateurs A et B distants de* $2700\,\mathrm{m}$ *voient un avion situé dans le plan vertical de la base d'observation sous des angles $\widehat{C_1AO_1} = 35°$ et $\widehat{C_1BO_1} = 64°$, l'avion se situant entre A et B. Après quelques secondes, ils font une seconde observation sous des angles $\widehat{C_2AO_2} = 30.5°$ et $\widehat{C_2BO_2} = 80°$, l'avion se situant à la droite de B. Déterminez l'angle de montée de l'avion par rapport au segment AB, c'est-à-dire déterminez l'angle formé par la droite C_1C_2 et la droite AB.*

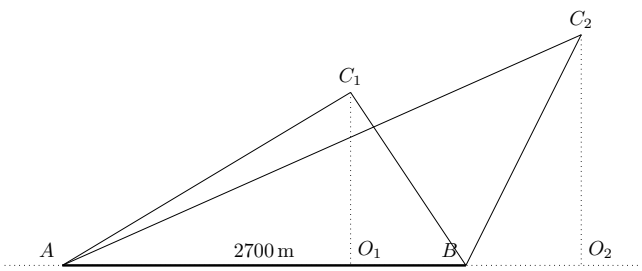


FIGURE 1 – Points d'observation

Solution

Dans le triangle ABC_1, $\widehat{C_1AB} + \widehat{C_1BA} + \widehat{AC_1B} = 180° \;\rightarrow\; \widehat{AC_1B} = 180° - 35° - 64° = 81°$. Toujours dans ce triangle, l'application de la formule des sinus donne :

$$\frac{\overline{AB}}{\sin \widehat{AC_1B}} = \frac{\overline{AC_1}}{\sin \widehat{C_1BA}} \;\rightarrow\; \overline{AC_1} = \frac{\sin 64°}{\sin 81°} \times 2700 = 2457\text{m}.$$

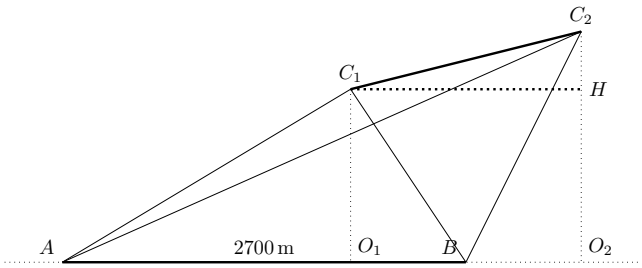
Dans le triangle rectangle C_1O_1A, il vient :

$$\sin \widehat{C_1AO_1} = \frac{\overline{O_1C_1}}{\overline{AC_1}} \;\rightarrow\; \overline{O_1C_1} = 1409\text{m}$$

et

$$\cos \widehat{C_1AO_1} = \frac{\overline{AO_1}}{\overline{AC_1}} \;\rightarrow\; \overline{AO_1} = 2013\text{m}$$

De manière similaire, dans le triangle ABC_2, on trouve $\overline{AC_2} = 3497$m et dans le triangle AO_2C_2, $\overline{C_2O_2} = 1775$m et $\overline{AO_2} = 3013$m.
Traçons la parallèle à O_1O_2 passant par C_1 pour former le triangle rectangle C_1HC_2 dans lequel l'angle $\widehat{C_2C_1H}$ est l'angle recherché :



$$\operatorname{tg} \widehat{C_1C_2H} = \frac{\overline{C_2H}}{\overline{C_1H}} = \frac{\overline{C_2O_2} - \overline{C_1O_1}}{\overline{AO_2} - \overline{AO_1}} \;\rightarrow\; \widehat{C_1C_2H} = 20°.$$

Alternativement, il est possible de déterminer la longueur des côtés BC_1 et BC_2 en appliquant la formule des sinus respectivement dans les triangles ABC_1 et ABC_2 :

$$\frac{\overline{AB}}{\sin \widehat{AC_1B}} = \frac{\overline{BC_1}}{\sin \widehat{C_1AB}} \;\rightarrow\; \overline{BC_1} = \frac{\sin 35°}{\sin 81°} \times 2700 = 1568\text{m}.$$

et

$$\frac{\overline{AB}}{\sin \widehat{AC_2B}} = \frac{\overline{BC_2}}{\sin \widehat{C_2AB}} \;\rightarrow\; \overline{BC_2} = \frac{\sin 30.5°}{\sin 49.5°} \times 2700 = 1802\text{m}.$$

En appliquant Al-Kashi dans le triangle BC_1C_2, on obtient alors la longueur du segment C_1C_2 :

$$\begin{aligned}\overline{C_1C_2} &= \sqrt{\overline{BC_1}^2 + \overline{BC_2}^2 - 2\overline{BC_1} \times \overline{BC_2} \times \cos \widehat{C_1BC_2}} \\ &= \sqrt{1568^2 + 1802^2 - 2 \times 1568 \times 1802 \times \cos(180° - 64° - 80°)} \\ &= 1065\text{m}\end{aligned}$$

Toujours dans le triangle BC_1C_2, la formule des sinus donne :

$$\frac{\overline{C_1C_2}}{\sin\widehat{C_1BC_2}} = \frac{\overline{BC_2}}{\sin\widehat{C_2C_1B}} \;\rightarrow\; \widehat{C_2C_1B} = \frac{\overline{BC_2}}{\overline{C_1C_2}}\sin\widehat{C_1BC_2} = 84^\circ.$$

Puisque les angles $\widehat{HC_1B}$ et $\widehat{C_1BO_1}$ sont égaux (angles alterne-interne), L'angle recherché est donné par $\widehat{C_2C_1H} = \widehat{C_2C_1B} - \widehat{C_1BO_1} = 84^\circ - 64^\circ = 20^\circ$.