LIÈGE université
Sciences Appliquées

QUESTIONS POSEES AUX EXAMENS D'ADMISSION

2016-2020

EXAMENS DE 2016

JUILLET 2016

ALGEBRE

1. Factoriser dans $\mathbb{R}$ le polynôme x^8+4.

2. Résoudre le système suivant, dans lequel m est un paramètre réel :

$$\begin{cases} mx+y=m+1 \\ m^3x+(2m-1)y=m^3+1 \end{cases}$$

ANALYSE

1. Soit la fonction
$$f(x)=\frac{x^2-a^2}{x^3-a^3}$$
où a représente un paramètre réel non nul.

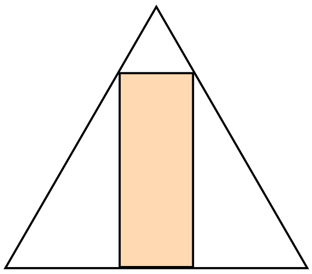
   En discutant s'il y a lieu en fonction de a,
   a) déterminer le domaine de définition de la fonction f et ses éventuelles asymptotes ;
   b) étudier la croissance/décroissance de f et caractériser ses éventuels extrema ;
   c) sur base des informations recueillies, esquisser le graphique de f.

2. a) Calculer
$$I_0=\int \ln x\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad I_1=\int x\ln x\,dx$$
   b) Pour tout $\ell\in]0,1[$, on définit
$$J_n(\ell)=\int_\ell^1 x^n\ln x\,dx \qquad \text{où} \quad n\in\mathbb{N}$$
   Calculer
$$\lim_{\ell\to 0^+} J_n(\ell)$$

c) Calculer

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$$

3. On inscrit un rectangle dans un triangle équilatéral en faisant en sorte qu'un côté du rectangle s'appuie sur un côté du triangle comme illustré ci-dessous.
   Quelle est la fraction maximale de la surface du triangle qui peut être ainsi recouverte ?



TRIGONOMETRIE ET CALCUL NUMERIQUE

1. Trouver toutes les valeurs de x pour lesquelles l'égalité suivante est vérifiée :

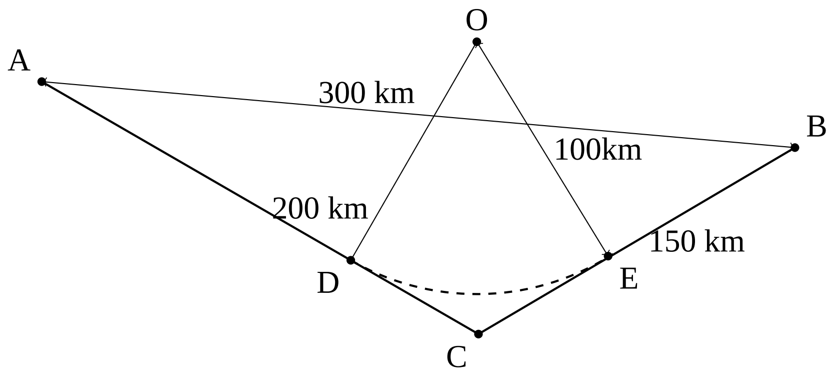
   $$\sin 5x + \sin x + 2\sin^2 x = 1$$

   Présenter sur le cercle trigonométrique celles appartenant à l'intervalle $[-\pi, \pi[$.

2. Si A, B et C désignent les angles d'un triangle et a, b et c les longueurs des côtés opposés à ces angles, montrer que :

   $$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$$

3. Deux lignes de chemin de fer relient en ligne droite les villes A et B distantes de 300 km par l'intermédiaire d'une ville C. Les villes A et B se trouvent respectivement à une distance de 200 km et 150 km de la ville C. Pour diminuer le temps de trajet entre les villes A et B, on désire éviter de passer par la ville C et raccorder les deux lignes de chemin de fer par une courbe en arc de cercle de 100 km de rayon tangente aux droites AC et CB aux points D et E comme représenté sur la figure proposée page suivante.
   Quelle est la longueur de la nouvelle ligne à construire (arc DE) ? Quelle sera la distance ($ADEB$) à parcourir pour rejoindre les villes A et B par cette nouvelle ligne ? Calculer la surface DCE du terrain situé entre l'ancienne ligne et la nouvelle ligne.



GEOMETRIE ET GEOMETRIE ANALYTIQUE

1. Par un point P intérieur à un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon r, on mène deux droites perpendi[illegible]es d_1 et d_2. On note A_1 un des points d'intersection de d_1 avec $\mathcal{C}$, et A_2 un des p[illegible] l'intersection de d_2 avec $\mathcal{C}$. Le milieu de la corde $[A_1A_2]$ est noté M. Démontr[illegible]alité
$$|OM|^2 + |PM|^2 = r^2,$$
où $|XY|$ dénote la longueur du segment $[XY]$.

2. On donne une droite d tangente à un cercle $\mathcal{C}$, et on considère le lieu des points dont la distance à $\mathcal{C}$ est égale à la distance à d. On demande de caractériser ce lieu à l'aide d'équations cartésiennes, de préciser la nature de celui-ci, et de le représenter graphiquement.

SEPTEMBRE 2016

ALGEBRE

1. Un polynôme réel $f(x)$ et son polynôme dérivé $f'(x)$ s'annulent tous les deux en $x = 2$. Montrer que $f(x)$ est un multiple de $(x-2)^2$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$\frac{1}{4x^2-8x+3} \leq \frac{2}{4x^2-8x+4}.$$

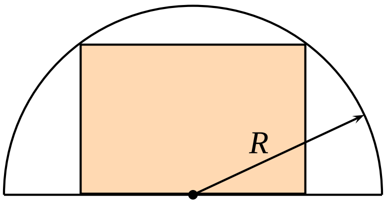
ANALYSE

1. Soit la fonction
$$f(x) = \ln\frac{a^2+x^2}{ax}$$
où a représente un paramètre réel strictement positif.

   En discutant s'il y a lieu en fonction de a,
   a) déterminer le domaine de définition de la fonction f et ses éventuelles asymptotes ;
   b) étudier la croissance/décroissance de f et caractériser ses éventuels extrema ;
   c) étudier la concavité de f et identifier ses éventuels points d'inflexion ;
   d) sur base des informations recueillies, esquisser le graphique de f.

2. On considère les intégrales du type
$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n\theta\, d\theta \qquad \text{où} \qquad n \in \mathbb{N}$$
   a) Calculer I_0, I_1, I_2 et I_3.
   b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$
   c) Utiliser les résultats ci-dessus pour calculer
$$I_7 = \int_0^{\pi/2} \sin^7\theta\, d\theta$$

3. On inscrit un rectangle dans un demi-cercle de rayon R en faisant en sorte qu'un côté du rectangle s'appuie sur le diamètre du demi-cercle comme illustré ci-contre.
   Quelle est la fraction maximale de la surface du demi-cercle qui peut être ainsi recouverte ?



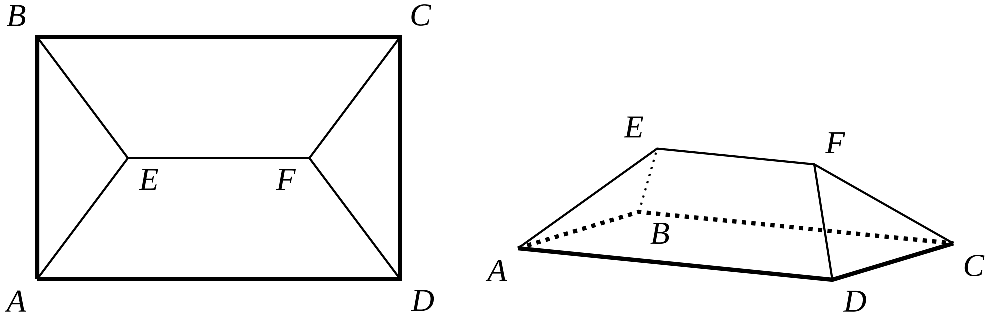
TRIGONOMETRIE ET CALCUL NUMERIQUE

1. Résoudre l'équation trigonométrique suivante en précisant les conditions d'existence :

$$\frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\operatorname{tg} x + \sin x} = 2 - 2\cos x$$

   Représenter les solutions appartenant à l'intervalle $[-\pi, \pi[$ sur le cercle trigonométrique.

2. On souhaite couvrir la toiture à quatre pans représentée en vue de haut et en perspective sur la figure suivante. La base de la toiture est rectangulaire, de côtés $AB = 8m$ et $BC = 12m$. La toiture est symétrique, c'est-à-dire que les pans ABE et CDF sont isométriques, de même que les pans $BCFE$ et $ADFE$. En mesurant les arêtes principales de la toiture, on obtient que $AE = 6m$, $EF = 6m$ et $FD = 6m$.



   a) Calculer la surface totale de la toiture à couvrir.
   b) Calculer la hauteur de l'arête EF par rapport à la base rectangulaire.
   c) On souhaite poser des panneaux photovoltaïques sur la toiture. Pour ce faire, une inclinaison entre 30 ° et 40 ° est souhaitée. Déterminer quel pan de la toiture est le plus approprié pour accueillir les panneaux.

3. Si A, B et C désignent les angles d'un triangle et a, b et c les longueurs des côtés opposés à ces angles, montrer que :

$$\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{a+b+c}{2a}\sin\frac{A}{2}$$

GEOMETRIE ET GEOMETRIE ANALYTIQUE

1. On considère un triangle ABC et un point arbitraire P appartenant au côté $[BC]$ et distinct de B et C. Démontrer que l'on a

$$\frac{|AB|^2}{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BP}}+\frac{|AC|^2}{\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CP}}+\frac{|AP|^2}{\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PB}}=1,$$

   où $|XY|$ dénote la longueur du segment $[XY]$.

2. On donne une droite d passant par le centre d'un cercle $\mathcal{C}$, et on considère le lieu des centres des cercles qui sont à la fois tangents à d et tangents extérieurement à $\mathcal{C}$. On demande de caractériser ce lieu à l'aide d'équations cartésiennes, de préciser la nature de celui-ci, et de le représenter graphiquement.

EXAMENS DE 2017

JUILLET 2017

ALGEBRE

1. Calculer la valeur de l'expression

$$E = \sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha .$$

   Suggestion. On peut voir dans l'expression à évaluer la partie imaginaire d'une autre expression facile à calculer.

2. Déterminer l'ensemble des valeurs (réelles) de a pour lesquelles l'énoncé

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x, \text{ si } x \geq a \text{ alors } x^2 - ax + 2 - a \geq 0}$$

   est vrai.

ANALYSE

1. La fonction coth, appelée cotangente hyperbolique, peut être définie par

$$\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

   a) Déterminer son domaine de définition.
   b) Déterminer sa parité éventuelle.
   c) Déterminer les éventuelles asymptotes de son graphe.
   d) Étudier la croissance/décroissance de coth et caractériser ses éventuels extrema.
   e) Étudier la concavité du graphe et déterminer ses éventuels points d'inflexion.
   f) Esquisser le graphe de coth.

g) Sans calcul supplémentaire, esquisser le graphe de la fonction réciproque de la fonction coth. Préciser son domaine de définition.

2. Calculer les intégrales et primitives suivantes où R est une constante strictement positive.

   a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx$

   b) $\displaystyle\int x\sqrt{R^2 - x^2}\, dx$

   c) $\displaystyle\int \sqrt{R^2 - x^2}\, dx$

3. Une citerne à gaz en tôle a la forme d'un cylindre à base circulaire de rayon r soudé à deux demi-sphères de même rayon.

   Sachant que le prix de la tôle est de γ euros par mètre carré et que le prix de la soudure (aux jonctions entre le cylindre et les demi-sphères) est de $\gamma\,\ell$ euros par mètre, où γ et ℓ sont des constantes strictement positives, montrer qu'il existe un rayon optimum r^* permettant de minimiser le coût de réalisation de cette citerne pour un volume $V = 2\pi\ell^3/3$ donné.

   Exprimer r^* en fonction de ℓ.

TRIGONOMETRIE ET CALCUL NUMERIQUE

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$2\sin(2x) + \cos(2x) = 2\sin^2 x + 3\,\mathrm{tg}\, x$$

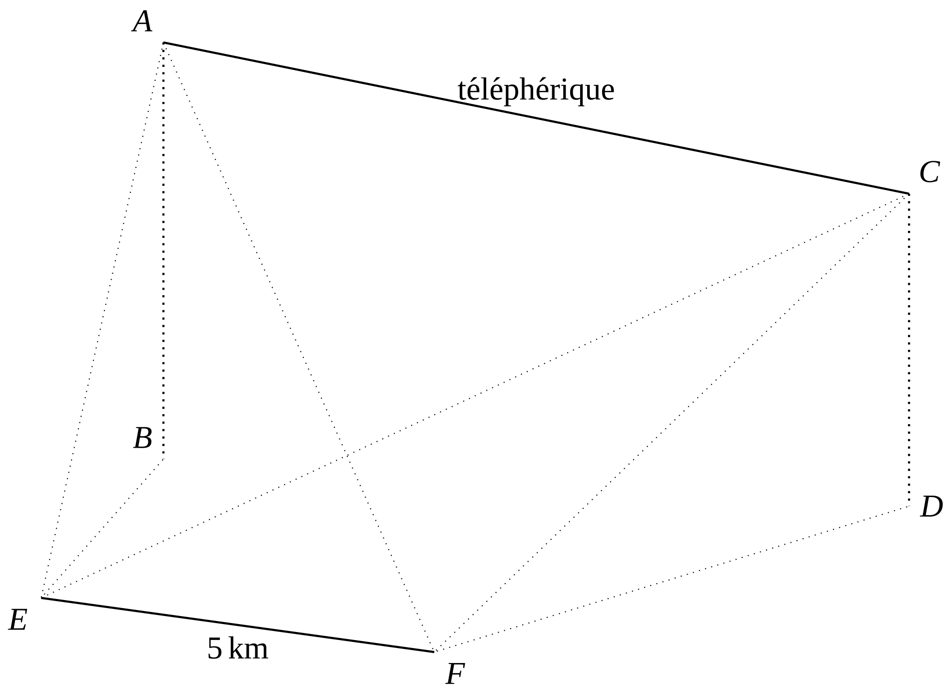
   et représenter les solutions comprises entre $-\pi$ et π sur le cercle trigonométrique.

2. A, B et C désignant les mesures des angles d'un triangle non dégénéré, montrer que, si

$$\mathrm{tg}\, B = \frac{\sin C}{1 - \cos C},$$

   alors le triangle est isocèle.

3. On désire relier les sommets A et C de deux collines par un téléphérique. Afin de déterminer l'ampleur des travaux, des mesures topographiques sont effectuées à partir de deux points E et F distants de 5 km et situés tous deux dans un même plan d'observation horizontal. Les points B et D représentent respectivement les bases des sommets A et C dans le plan d'observation. Les angles $\widehat{AFE}$, $\widehat{AEF}$ et $\widehat{AEB}$ valent respectivement $12.3672°$, $157.1063°$ et $5.8750°$ et les angles $\widehat{CFE}$, $\widehat{CEF}$ et $\widehat{CFD}$ valent respectivement $80.2493°$, $68.9063°$ et $3.1996°$.



   a) Calculer la hauteur des sommets des deux collines par rapport au plan d'observation (longueur des segments $[A,B]$ et $[C,D]$).
   b) Calculer la distance entre les deux sommets (longueur du segment $[A,C]$)

GEOMETRIE ET GEOMETRIE ANALYTIQUE

1. On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O. Sur un diamètre de ce cercle, on fixe deux points distincts P et P' équidistants de O. Un point M mobile parcourt $\mathcal{C}$. Démontrer que le produit scalaire $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{P'M}$ reste constant.

2. On donne un trapèze $ABCD$, avec $AB \parallel CD$. Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ de ce trapèze sont de même longueur et se coupent à angle droit. Leur intersection est notée I.

   a) Démontrer que les segments $[AI]$ et $[BI]$ sont de même longueur.

   b) Calculer $|AD|^2 + |DC|^2 + |CB|^2 + |AB|^2$ en fonction de $|AD|$.

   c) Si l'on note M le milieu de $[AD]$, démontrer que IM est perpendiculaire à BC.

SEPTEMBRE 2017

ALGEBRE

1. Résoudre le système suivant, dans lequel a est un paramètre réel :

$$\begin{cases} ax + (a+1)y + (a+2)z = a \\ (a-1)x + (a+3)y + (a+1)z = a-1 \\ (a+2)x - y + (2a+2)z = 4 \end{cases}$$

2. Décomposer dans $\mathbb{C}$ le polynôme $z^4 + 1$ en un produit du type

$$(z^2 + b_1 z + c_1)(z^2 + b_2 z + c_2)\,.$$

   Si plusieurs possibilités existent, on les donnera toutes.

ANALYSE

1. On considère la fonction

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}(x^2 + a)$$

   où a désigne un paramètre réel strictement positif. En discutant s'il y a lieu en fonction de la valeur de a,

   a) déterminer le domaine de définition de f ;

   b) déterminer sa parité éventuelle ;

c) déterminer les éventuelles asymptotes du graphe de f ;

d) étudier la croissance/décroissance de f et caractériser ses éventuels extrema ;

e) esquisser le graphe de f.

2. On considère les intégrales

$$S_n = \int_0^{\pi/2} x^n \sin x \, dx \qquad \text{et} \qquad C_n = \int_0^{\pi/2} x^n \cos x \, dx$$

a) Calculer C_0.

b) Calculer S_1.

c) Montrer que, pour tout $n > 0$,

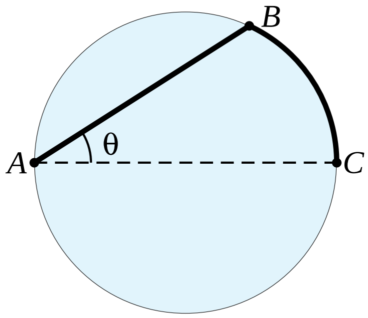
$$C_n = \alpha^n - nS_{n-1}$$

où α désigne une constante à déterminer.

d) De ce qui précède, déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^1 \left(\arcsin x\right)^2 dx$.

3. Un canard se trouvant en A au bord d'un lac circulaire de rayon R souhaite atteindre le point C diamétralement opposé du lac. Pour ce faire, il peut nager en ligne droite de A à C, marcher le long de la berge de A à C ou nager en ligne droite depuis son point de départ jusqu'à un point intermédiaire B situé sur la berge puis marcher le long du bord de B à C (voir figure).

Sachant que ce canard marche deux fois plus vite qu'il ne nage, déterminer la trajectoire la plus rapide pour atteindre le point C. Justifier.

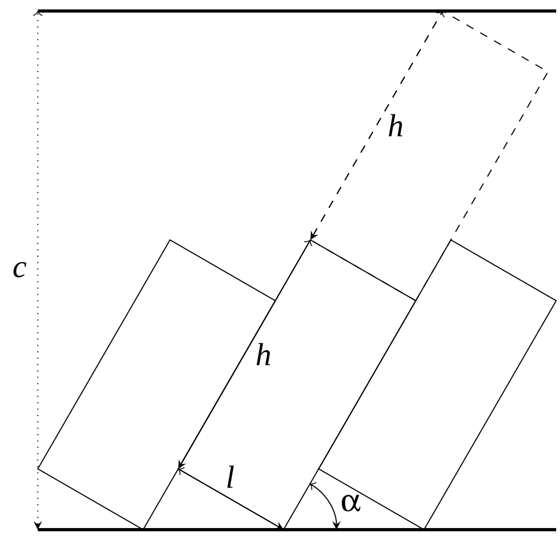


TRIGONOMETRIE ET CALCUL NUMERIQUE

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$
$$2\sin^2 x \operatorname{cotg} x + \sin(3x) + \sin x = 0$$
en spécifiant les conditions d'existence et représenter les solutions comprises dans $[-\pi, \pi[$ sur le cercle trigonométrique.

2. Soient A, B et C les trois angles d'un triangle non dégénéré. Montrer que, si
$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2,$$
alors le triangle correspondant est rectangle.

3. On désire installer des emplacements de stationnement de voitures dans une rue de largeur c. Chaque emplacement doit posséder une largeur l de 2.3 m, une profondeur h de 5 m et doit comprendre une surface de dégagement au moins égale à la surface de l'emplacement de stationnement pour permettre la sortie du véhicule. La situation est représentée à la figure ci-dessous où l représente la largeur de l'emplacement de stationnement, h sa profondeur et α l'angle d'inclinaison de l'emplacement avec le bord de la route. La surface de dégagement est représentée en pointillé.
   (a) Calculer la largeur minimale c de la route permettant d'installer les emplacements de stationnement si l'angle d'inclinaison α est de 60°.
   (b) Calculer la valeur maximale de l'angle d'inclinaison α permettant l'installation des emplacements de stationnement si la largeur de la route c vaut 8.7 m.



GEOMETRIE ET GEOMETRIE ANALYTIQUE

1. On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O, et un parallélogramme $ABCD$ dont l'intersection des diagonales coïncide avec O. Un point M mobile parcourt $\mathcal{C}$. Démontrer que la valeur de
$$|MA|^2+|MB|^2+|MC|^2+|MD|^2$$
reste constante.

2. Sur les côtés $[OA]$ et $[OB]$ d'un triangle rectangle en O, à l'extérieur de celui-ci, on construit les triangles équilatéraux OAC et OBE. Les milieux des segments $[OA]$ et $[OB]$ sont respectivement notés A' et B'.
Démontrer que la hauteur du triangle OAB issue de O et les droites $A'E$ et $B'C$ sont concourantes.

EXAMENS DE 2018

JUILLET 2018

ALGEBRE

1. Résoudre l'inéquation suivante dans $\mathbb{R}$:

$$|x+1|+|x-2|<3\,.$$

2. a) A quelles conditions sur les paramètres réels a, b et c le polynôme

$$X^4+aX^2+bX+c$$

est-il divisible par X^2+X+1 ?

b) A quelle condition sur les paramètres réels p et q le polynôme

$$X^3+pX+q$$

admet-il une racine double ? Cette racine est-elle toujours réelle ?

ANALYSE

1. On considère la fonction

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x-a}$$

où a désigne un paramètre réel strictement positif.

En discutant s'il y a lieu en fonction de la valeur de a,

a) déterminer le domaine de définition de f ;

b) déterminer sa parité éventuelle ;

c) déterminer les éventuelles asymptotes de son graphique ;

d) étudier la croissance/décroissance de f et caractériser ses éventuels extrema ;

e) esquisser le graphique de f.

2. Soit

$$I_n = \int_1^{\sqrt{e}} x \, \left(\ln x^2\right)^n \, dx$$

a) Calculer I_0.

b) Calculer I_1.

c) Montrer que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, il existe une constante α telle que

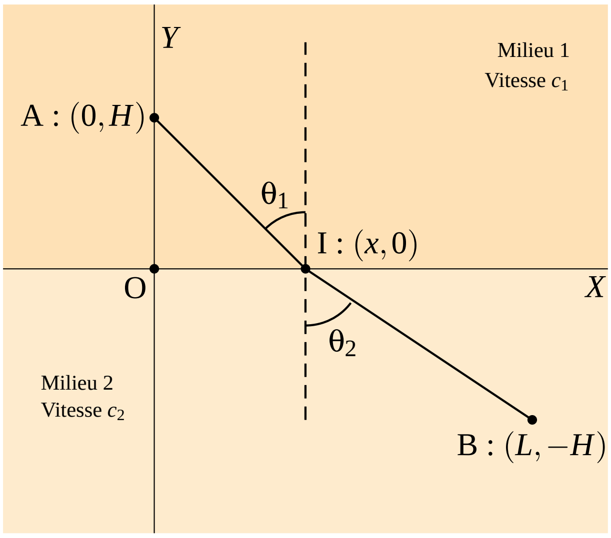
$$I_n = \frac{1}{2} \int_1^{\alpha} (\ln x)^n \, dx$$

d) Montrer que, quel que soit $n \in \mathbb{N}_0$, $\quad I_n = \dfrac{e}{2} - n\, I_{n-1}$.

3. Pour aller d'un point à un autre, la lumière suit le chemin le plus rapide. Lorsque le milieu est homogène et que la vitesse de propagation de la lumière est donc constante, le rayon lumineux suit une trajectoire rectiligne entre les deux points. Dans ce cas, le chemin le plus rapide est également le plus court. Dans un milieu non homogène, par contre, le chemin le plus rapide ne correspond pas nécessairement au chemin le plus court de sorte que la propagation n'a pas lieu en ligne droite.

   La loi de la réfraction de Snell-Descartes peut être obtenue par application de ce principe. Pour établir cette loi, on considère deux milieux homogènes séparés par une interface plane d'équation $y = 0$. Dans les deux milieux, la lumière se propage en ligne droite à des vitesses c_1 et c_2. Au passage de l'interface plane entre les deux milieux, le rayon est réfracté et change de direction.

   On considère en particulier le rayon lumineux allant du point A de coordonnées $(0, H)$ au point B de coordonnées $(L, -H)$ où H et L sont des constantes strictement positives. Ce problème est donc caractérisé par les quatre paramètres H, L, c_1 et c_2. On note également $x \in \mathbb{R}$, la coordonnée horizontale du point I où le rayon est incident à l'interface.



a) Exprimer en fonction de x et des quatre paramètres du problème le temps de parcours du rayon lumineux allant du point A au point B.

b) Montrer qu'il est nécessaire que le trajet du rayon lumineux soit tel que (voir figure)

$$\frac{\sin\theta_1}{c_1} = \frac{\sin\theta_2}{c_2}$$

TRIGONOMETRIE ET CALCUL NUMERIQUE

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation homogène

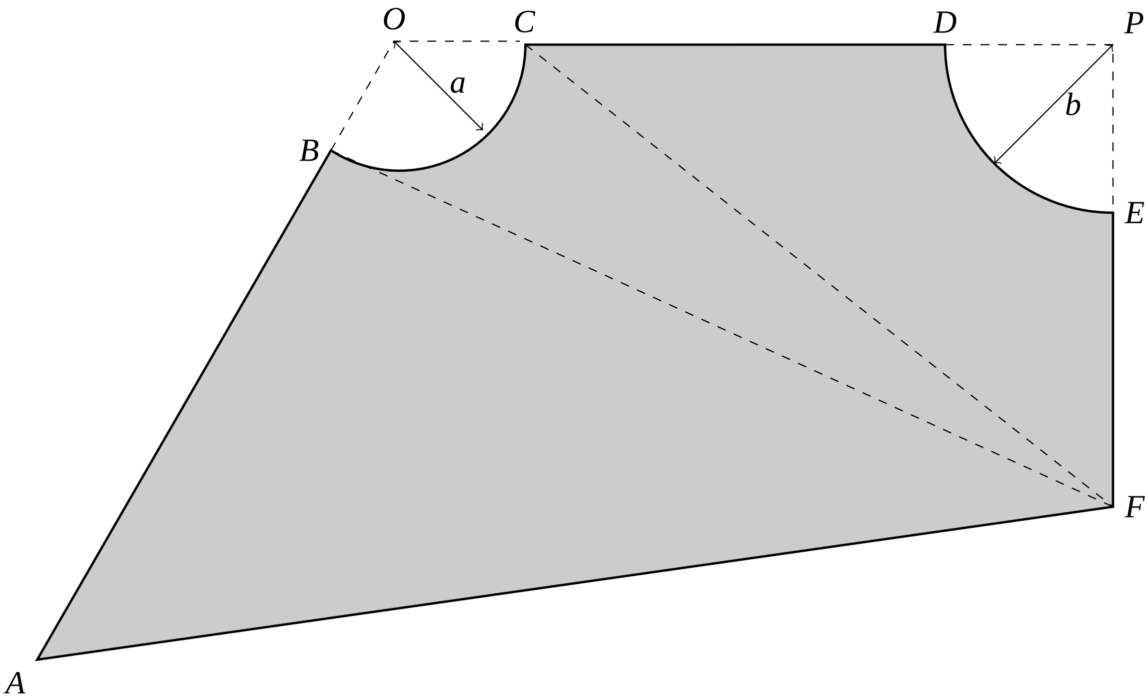
$$\sin^3 x + 2\cos^3 x = 3\sin^2 x \cos x$$

   et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.
   Les solutions trouvées ne sont pas toutes exprimables sous la forme d'angles remarquables. Il n'empêche qu'il est possible de les représenter de façon précise sur le cercle trigonométrique sachant que $\sqrt{3} \simeq 1.732$.

2. Si A, B et C sont les mesures des angles d'un triangle quelconque non dégénéré, montrer que

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \cos^2 C = 1 + 2\sin A \sin B \cos C.$$

3. Dans le cas d'un quadrilatère plan quelconque, la connaissance de la longueur des quatre côtés et d'une diagonale suffit pour déterminer sa surface. Cependant, on désire ici carreler une pièce $ABCDEF$ dont la forme est celle représentée par la zone grisée de la figure ci-dessous. Les courbes BC et DE sont des arcs de cercle de centre O et P et de rayon a et b respectivement. Les segments rectilignes $[A,B]$, $[C,D]$, $[E,F]$ et $[A,F]$ mesurent respectivement 7 m, 5 m, 3.5 m et 12.64 m. Les deux segments $[B,F]$ et $[C,F]$ mesurent 10.11 m et 8.90 m. De plus, l'angle $\widehat{CPF}$ est droit. On demande de
   a) déterminer le rayon b de l'arc DE,
   b) déterminer le rayon a de l'arc BC,
   c) calculer l'aire intérieure de la pièce représentée par la surface grisée $ABCDEF$.



GEOMETRIE ET GEOMETRIE ANALYTIQUE

1. On donne quatre points de l'espace A, B, C et D.
   a) Montrer que le vecteur

$$2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} - 3\overrightarrow{MD}$$

   est indépendant du point M.

b) Notons $\mathbf{v}$ le vecteur dont il est question au point précédent. Montrer que, si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, alors la valeur de

$$2\|\overrightarrow{MA}\|^2 - \|\overrightarrow{MB}\|^2 + 2\|\overrightarrow{MC}\|^2 - 3\|\overrightarrow{MD}\|^2,$$

où $\|\overrightarrow{XY}\|$ désigne la norme du vecteur $\overrightarrow{XY}$, est indépendante du point M.

2. Un segment de longueur constante se déplace dans le plan, de manière telle que ses extrémités A et B s'appuient sur les deux côtés d'un angle droit donné.
   On demande
   a) de déterminer le lieu d'un point P quelconque du segment (en précisant la nature de ce lieu),
   b) de représenter graphiquement ce lieu lorsque P est le milieu du segment.

SEPTEMBRE 2018

ALGEBRE

1. Résoudre le système suivant, dans lequel a est un paramètre réel :

$$\begin{cases} x + ay + a^2z = 1\,, \\ x + ay + az = a\,, \\ ax + a^2y + a^3z = a^3\,. \end{cases}$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^3 + (\operatorname{cis}\theta)^2|z| = 0\,,$$

   dans laquelle θ est un paramètre réel.
   Quel est l'ensemble des valeurs possibles de $|z|$?
   Donner la forme algébrique des solutions éventuelles dans le cas $\theta = 0$.

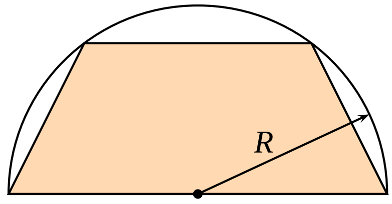
   Rappel. L'expression $\operatorname{cis}\theta$ est une abréviation de $(\cos\theta + i\sin\theta)$.

ANALYSE

1. On considère la fonction
$$f(x) = \ln \frac{x}{a^3 - x^3}$$
où a désigne un paramètre réel strictement positif.
   a) Déterminer le domaine de définition de f.
   b) Déterminer la parité éventuelle de f.
   c) Déterminer les éventuelles asymptotes de son graphique.
   d) Étudier la croissance/décroissance de f et caractériser ses éventuels extrema.
   e) Étudier la concavité du graphique de f et identifier ses éventuels points d'inflexion.
   f) Esquisser le graphique de f.

2. Evaluer chacune des expressions ci-dessous :
   a)
$$\int_0^{\pi} x \, dx$$
   b)
$$\int x \sin x \, dx$$
   c)
$$\int_0^{\pi} x \sin^2 x \, dx$$
   d)
$$\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

3. On inscrit un trapèze dans un demi-cercle de rayon R en faisant en sorte qu'une base du trapèze s'appuie sur le diamètre du demi-cercle comme illustré ci-dessous.
Quelle est la fraction maximale de la surface du demi-cercle qui peut être ainsi recouverte ?



TRIGONOMETRIE ET CALCUL NUMERIQUE

1. Résoudre l'équation trigonométrique suivante

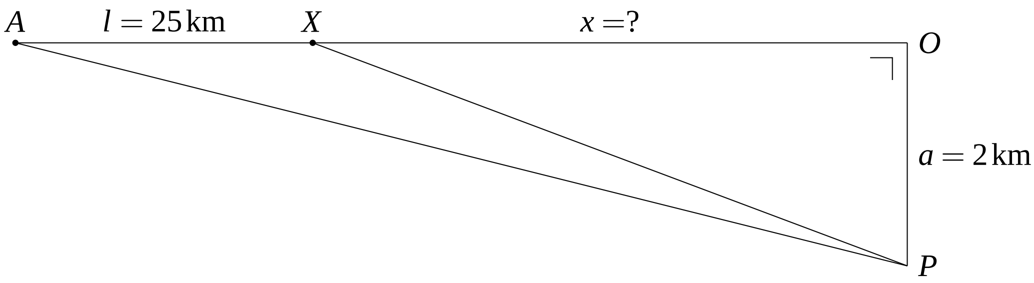
$$\sin x - 2\sin 3x + \sin 5x = -\cos 2x + \cos 4x$$

et représenter les solutions appartenant à l'intervalle $[-\pi, +\pi[$ sur le cercle trigonométrique.

2. Montrer que si A, B, C sont trois angles strictement positifs tels que $A+B+C = \frac{\pi}{2}$ alors

$$\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} A \operatorname{tg} C = 1.$$

3. Un observateur situé en O dans un désert parfaitement plan est aligné avec deux éléments remarquables A et X séparés entre eux par une distance $l = 25\,\text{km}$. Cet observateur cherche à déterminer la distance qui le sépare du point X en se déplaçant en P d'une distance $a = 2\,\text{km}$ dans une direction perpendiculaire à l'axe AXO. De ce nouveau point de vue, il mesure l'angle $\widehat{XPA} = 1°6'0''$.



a) Déterminer l'angle $\widehat{PAO}$.

b) Calculer la distance x entre les points O et X.

c) Calculer la distance $\overline{PA}$.

Les angles seront calculés à la seconde près et les distances avec 5 chiffres significatifs.

GEOMETRIE ET GEOMETRIE ANALYTIQUE

1. Soient deux droites perpendiculaires X,Y, sécantes en O. Sur X, on fixe les points A et B de telle sorte que l'on ait $\overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{OB}$. Pour tout $P \in Y$, on définit le point Q tel que $3\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP}$.

   Quel est le lieu du ou des point(s) commun(s) aux droites AP et BQ lorsque P parcourt Y ?

2. Dans un repère orthonormé de l'espace, on donne les droites d_a et d_b par leurs équations cartésiennes

$$d_a : \begin{cases} x - z - a = 0 \\ y + 3z + 1 = 0 \end{cases} \qquad d_b : \begin{cases} x + 2y + z - 2b = 0 \\ 3x + 3y + 2z - 7 = 0 \end{cases}$$

   où a, b sont des paramètres réels.

   a) Montrer que ces droites ne sont pas parallèles, quels que soient a et b.
   b) Déterminer la condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que ces droites soient sécantes.
   c) Sous la condition déterminée au point précédent, déterminer alors une équation cartésienne du plan contenant ces droites.

EXAMENS DE 2019

JUILLET 2019

ALGEBRE

1. Montrer que pour tous $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq p \leq n$, on a

$$\sum_{i=0}^{p} C_n^i C_{n-i}^{p-i} = 2^p C_n^p \text{ et } \sum_{i=0}^{p} (-1)^i C_n^i C_{n-i}^{p-i} = 0 .$$

   Suggestion : on montrera d'abord que

$$C_n^i C_{n-i}^{p-i} = C_p^i C_n^p$$

   pour tous naturels i, p, n tels que $i \leq p \leq n$.

2. On considère l'expression suivante, dans laquelle n est un paramètre entier naturel :

$$\frac{\left(2 + i\sqrt{12}\right)^7}{\left(\sqrt{3} - i\right)^n} .$$

   On demande sa valeur, sous forme algébrique et sous forme trigonométrique, quand n vaut 16 et quand n vaut 17.

ANALYSE

1. On considère la fonction
$$f(x) = x + \sqrt{x^2 - 2x + a}$$
   où a désigne un paramètre réel supérieur ou égal à 1.
   En discutant s'il y a lieu en fonction de la valeur de a,
   a) déterminer le domaine de définition de f ;

b) déterminer les éventuelles asymptotes de son graphique ;

c) étudier la croissance/décroissance de f et caractériser ses éventuels extrema ;

d) esquisser le graphique de f.

2. Soit

$$\phi_n(x) = \int e^{-x} \cos^n x \, dx \qquad \text{et} \qquad F_n = \int_0^{\pi/2} e^{-x} \cos^n x \, dx$$

où n désigne un naturel.

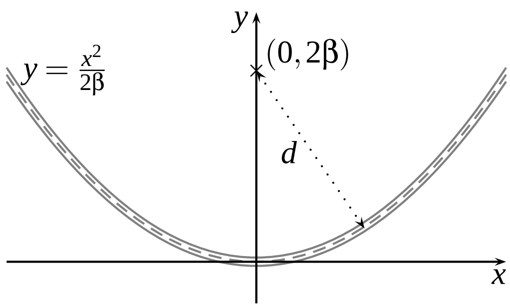
a) Calculer $\phi_0(x)$ et F_0.

b) Calculer $\phi_1(x)$ et F_1.

c) Montrer que $(1+n^2)F_n = 1 + n(n-1)F_{n-2}$, quel que soit le naturel $n \geq 2$.

3. On désire étudier les nuisances sonores causées par le trafic sur une route dont le tracé est représenté par la courbe d'équation $2\beta y = x^2$ où β désigne un paramètre réel strictement positif (voir figure ci-dessous).

Dans le cadre de cette étude, on demande de déterminer le point de la route d'abscisse $x > 0$ le plus proche de l'habitation située au point de coordonnées $(0, 2\beta)$ et d'évaluer la distance d entre cette habitation et la route.



TRIGONOMETRIE ET CALCUL NUMERIQUE

1. Montrer que, si la relation suivante liant les mesures des trois angles A, B et C d'un triangle est vérifiée

$$\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C = 1$$

alors, A, B ou C vaut $120°$.

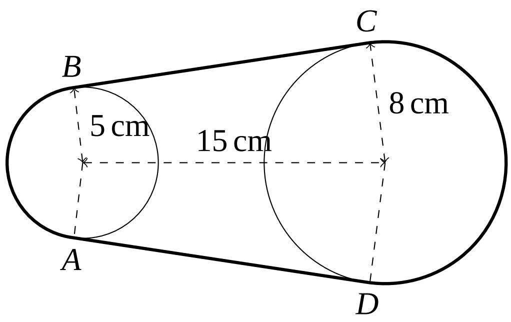
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$4(\sin x + \cos x) - 8\sin x \cos x = 5$$

et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique. Noter que bien que les solutions trouvées ne soient pas exprimables sous la forme d'angles remarquables, il est possible de les représenter de façon précise sur le cercle trigonométrique.

Suggestion pour résoudre l'équation : poser $y = \sin x + \cos x$.

3. Deux poulies de rayons respectifs 5 cm et 8 cm sont disposées à 15 cm de distance centre à centre. Calculer la longueur L de la courroie autour de ces poulies. La courroie est représentée en gras sur la figure fournie ci-dessous et les points A, B, C et D représentent les points de tangence de cette courroie avec les poulies.



GEOMETRIE ET GEOMETRIE ANALYTIQUE

1. On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé et on donne les points P d'abscisse 1, Q d'ordonnée 1 tels que les droites OP et OQ sont perpendiculaires.
   Déterminer le lieu de la projection orthogonale M de l'origine O sur le droite PQ.

2. Soit G le centre de gravité du triangle ABC.
   Démontrer que l'on a

$$\frac{\|AB\|^2 + \|BC\|^2 + \|CA\|^2}{\|GA\|^2 + \|GB\|^2 + \|GC\|^2} = 3$$

où $\|XY\|$ désigne la longueur du segment joignant le point X au point Y.

SEPTEMBRE 2019

ALGEBRE

1. Soit $(F_n)_{n\geq 0}$ la suite de Fibonacci, définie par :

$$F_0 = 0\,,\ F_1 = 1 \text{ et } F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ pour } n \geq 2\,.$$

   Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{i=0}^{n} F_i^2 \;=\; F_n F_{n+1}\,.$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante, dans laquelle m est un paramètre réel :

$$\frac{1}{x-2} \;=\; \frac{2-m}{7x-2x^2-6}\,.$$

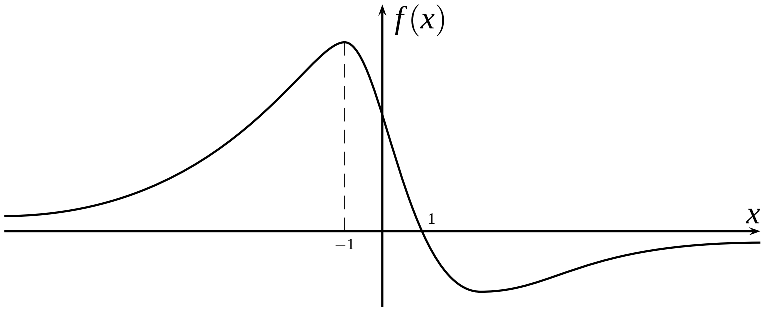
   Résoudre ensuite l'inéquation associée, obtenue en remplaçant le symbole "$=$" par le symbole "$\leq$".

ANALYSE

1. Déterminer toutes les valeurs des paramètres réels α, β et γ telles que le graphique de

$$f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{x^2 + \gamma}$$

   présente l'allure esquissée ci-dessous. Justifier.



2. a) Calculer $\displaystyle\int \frac{x^3}{1+x^2}\,dx$.

   b) Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} e^x\,dx$.

   c) Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 x\,dx$.

   d) En discutant s'il y a lieu en fonction de $n \in \mathbb{Z}$, calculer $\displaystyle\int_1^2 x^n \ln x\,dx$.

   e) On note $I(x) = \displaystyle\int_x^2 e^{-t^2}\,dt$. Montrer que $I(\alpha) \geq I(\beta)$ si $\alpha \leq \beta \leq 2$.

TRIGONOMETRIE ET CALCUL NUMERIQUE

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$\frac{\cos x - \cos 3x}{\sin x} = \cos x$$

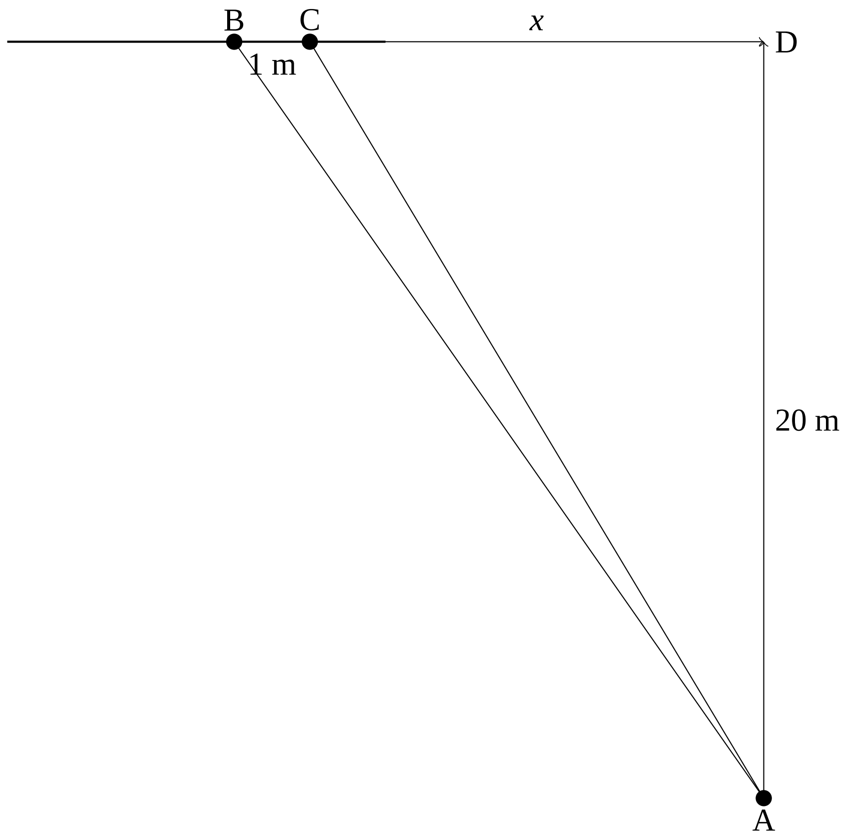
   en spécifiant les conditions d'existence et représenter les solutions comprises dans $[-\pi, \pi[$ sur le cercle trigonométrique.

2. Démontrer qu'un triangle est rectangle si la relation

$$\cos B + \cos C = \sin A$$

   reliant la mesure de ses angles A, B, C est vérifiée.

3. Lors d'un match de football, un coup franc doit être tiré du point A situé à 10 mètres à droite du poteau du gardien et à 20 mètres dans la profondeur du terrain (voir figure ci-dessous). On suppose que le gardien occupe une largeur de 1 mètre sur sa ligne de but, entre les points B et C et que le tir s'effectuera en ligne droite en négligeant la présence d'autres joueurs sur le terrain. Déterminer la distance $x = \overline{DC}$ où doit se placer le gardien afin de couper 2 degrés de l'angle de tir de l'attaquant, c'est-à-dire, afin que l'angle $\widehat{BAC}$ vaille 2 degrés.



GEOMETRIE ET GEOMETRIE ANALYTIQUE

1. Dans un repère orthonormé du plan, on donne la parabole $\mathcal{P}$ par son équation cartésienne
$$x^2 = 4y.$$
   a) Représenter la parabole.
   b) Déterminer l'équation cartésienne d'une tangente quelconque à la courbe $\mathcal{P}$. (Attention : l'équation doit être valable pour n'importe quelle tangente à $\mathcal{P}$.)
   c) Déterminer le lieu des points qui sont l'intersection de deux tangentes à $\mathcal{P}$ orthogonales entre elles.

2. Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère la droite d_1 passant par les points A et B respectivement de coordonnées $(1, 2, 3)$ et $(-1, 0, 2)$, et la droite d_2 passant par les points C, D respectivement de coordonnées $(0, 1, 7)$ et $(2, 0, 5)$.

a) Déterminer l'équation cartésienne du plan Π parallèle à la droite d_1 et contenant la droite d_2.

b) Déterminer des équations paramétriques et des équations cartésiennes de la droite d_3 passant par C et orthogonale à d_1 et d_2.

EXAMENS DE 2020

Avertissement

Suite aux mesures sanitaires mises en place dans le cadre de la gestion de la pandémie ”COVID 19”, les contenus et les modalités organisationnelles de l’examen ont été adaptés pour les deux sessions de l’année 2020 (réduction des matières faisant l’objet de l’évaluation ainsi que du temps consacré à cette évaluation) ; les énoncés repris ci-après ne peuvent donc être perçus comme un reflet fidèle de la teneur habituelle de cet examen.

Pour mieux souligner cette particularité de l’année, nous proposons ”en l’état” les questionnaires qui ont été soumis aux étudiants lors de ces éditions exceptionnelles de l’examen.

JUILLET 2020 - Jour 1

TRIGONOMETRIE ET GEOMETRIE

Question I

Trouver toutes les solutions de l'équation trigonométrique

$$3\left[\sin(x)+\cos(x)\right]-4\left[\sin^3(x)+\cos^3(x)\right]=0.$$

Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

Question II

A un instant initial, deux observateurs A et B distants de 2700 m voient un avion situé dans le plan vertical de la base d'observation sous des angles $\widehat{C_1AO_1}=35°$ et $\widehat{C_1BO_1}=64°$, l'avion se situant entre A et B. Après quelques secondes, ils font une seconde observation sous des angles $\widehat{C_2AO_2}=30.5°$ et $\widehat{C_2BO_2}=80°$, l'avion se situant à la droite de B.

Déterminer l'angle de montée de l'avion par rapport au segment AB, c'est-à-dire l'angle formé par la droite C_1C_2 et la droite AB.

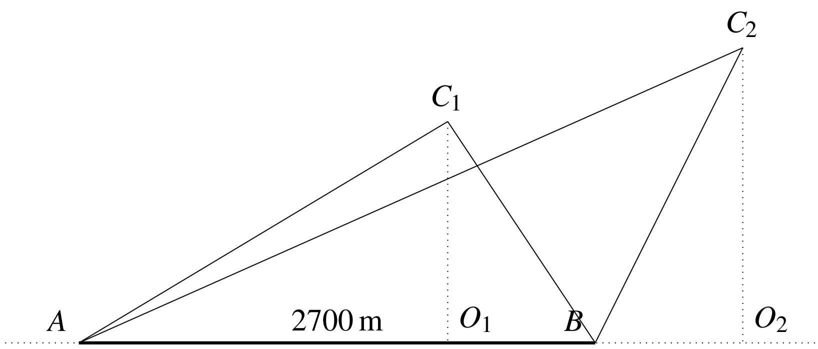


FIGURE 1 Points d'observation

Question III

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on donne les droites d_1 et d_2 respectivement d'équations cartésiennes

$$d_1 : \begin{cases} x - z - 1 = 0 \\ y + 3z + 1 = 0 \end{cases} \qquad d_2 : \begin{cases} x + 2y + z + 2 = 0 \\ 3x + 3y + 2z - 7 = 0 \end{cases}$$

a) Montrer que ces droites ne sont pas parallèles.

b) Déterminer l'équation cartésienne du plan contenant d_1 et parallèle à d_2.

Question IV

On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O. Sur un diamètre de ce cercle, on fixe deux points P et P' équidistants de O. Un point mobile M parcourt $\mathcal{C}$.

Démontrer que le produit scalaire $\overrightarrow{PM} \bullet \overrightarrow{P'M}$ ne dépend pas du point M.

JUILLET 2020 - Jour 2

ALGEBRE ET ANALYSE

Question I

Résoudre l'inéquation suivante dans $\mathbb{R}$:

$$\frac{x^2-4}{x^2-3x+2} \geq \sqrt{-x}+\frac{2|x|}{x}.$$

Question II

Résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{R}$:

$$6^{4x}-36^{x+1}-160 = 0.$$

Question III

On considère la fonction

$$f(x)=\frac{x^2+a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

où $a>0$ désigne un paramètre réel. En discutant s'il y a lieu en fonction de la valeur de a,

a) déterminer le domaine de définition de f ;

b) étudier la parité de f ;

c) déterminer les éventuelles asymptotes de son graphe ;

d) étudier la croissance/décroissance de f et caractériser ses éventuels extrema ;

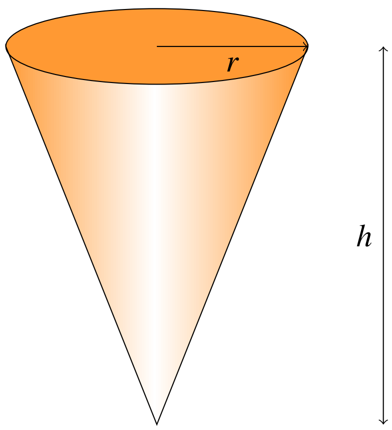
e) esquisser le graphique de f en reliant explicitement chacune des caractéristiques du graphique présenté aux résultats obtenus ci-dessus.

Question IV

Afin d'optimiser sa marge bénéficiaire, l'exploitant d'une friterie désire minimiser la quantité de papier utilisée pour confectionner ses cornets de frites. Le cornet est assimilé à un cône circulaire droit et doit contenir un volume V fixé de frites. Sachant que le volume V et l'aire latérale A d'un cône circulaire droit de rayon r et de hauteur h sont donnés par

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h, \qquad A = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$$

déterminer les dimensions r et h optimales du cornet en fonction du volume V.



SEPTEMBRE 2020 - Jour 1

ALGEBRE ET ANALYSE

Question I

Déterminer l'ensemble des valeurs réelles de r pour lesquelles l'énoncé

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ tel que } |x| < 1/2, \text{ on a } 2rx^2 + (3r-2)x - 3 \leq 0}$$

est vrai.

Question II

Soit une suite de nombres réels $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$u_1 = 2 \text{ et } u_{n+1} = \frac{n^2 u_n + 7}{n^2 + 2n + 1} \text{ pour } n \geq 1.$$

Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a

$$u_n = \frac{7n-5}{n^2}.$$

Question III

On considère la fonction

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{1+x^2}\right)$$

a) Déterminer le domaine de définition de f.

b) Étudier la parité de f.

c) Déterminer les éventuelles asymptotes de son graphe.

d) Étudier la croissance/décroissance de f et caractériser ses éventuels extrema.

e) Esquisser le graphique de f en reliant explicitement chacune des caractéristiques du graphique présenté aux résultats obtenus ci-dessus.

Question IV

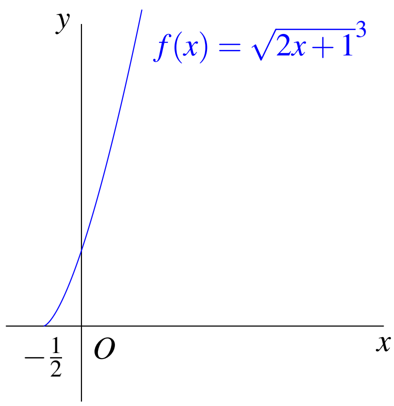
On définit la distance d'un point P à une courbe $\mathcal{C}$ comme la plus petite des distances entre le point P et tous les points de la courbe $\mathcal{C}$.

On s'intéresse à la distance d de l'origine O à la courbe $\mathcal{C}$ décrite par le graphe de la fonction

$$f(x) = \sqrt{(2x+1)^3}.$$

a) Calculer d et déterminer les coordonnées de l'unique point Q de $\mathcal{C}$ situé à la distance d de l'origine O.

b) Montrer que le segment OQ est perpendiculaire à la tangente au graphique de f en Q.



SEPTEMBRE 2020 - Jour 2

TRIGONOMETRIE ET GEOMETRIE

Question I

Démontrer que les droites d_m d'équation

$$mx + (1-m)y + m - 2 = 0$$

(où m est un paramètre réel) passent par un même point. Quel est ce point ?

Question II

On donne les quatre points A, B, C, D.

a) Démontrer que le vecteur

$$\mathbf{v} = 4\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 5\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$$

est indépendant du point M.

b) Démontrer que, si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, alors le nombre réel

$$4\|\overrightarrow{MA}\|^2 + 3\|\overrightarrow{MB}\|^2 - 5\|\overrightarrow{MC}\|^2 - 2\|\overrightarrow{MD}\|^2$$

est indépendant du point M.

Question III

Résoudre dans l'ensemble des réels l'équation trigonométrique

$$\mathrm{tg}^2(x) - 3\frac{\mathrm{tg}(x)}{\cos(x)} - \frac{1}{\cos^2(x)} = 1$$

et représenter les solutions en x sur le cercle trigonométrique.

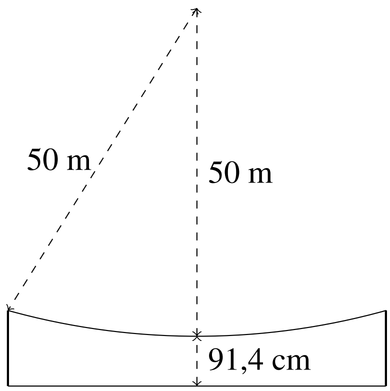


FIGURE 3 Dimensions filet

NOTES :

Université de Liège
Faculté des Sciences Appliquées
Institut de Mathématique - Bât. B37
Quartier Polytech 1
Allée de la Découverte, 12
4000 - LIEGE 1

Tél. : 04/366.94.36.
Email : Axelle.Lambotte@uliege.be

http ://www.facsa.uliege.be/admission