Université de Liège
Prof. Éric J.M. DELHEZ
Prof. Vincent DENOËL

ADMISSION AUX ÉTUDES D'INGÉNIEUR CIVIL
ÉPREUVE D'ANALYSE

Septembre 2014

Consignes :
- *Répondez aux trois questions sur des feuilles séparées. Si vous ne répondez pas à une question, remettez une feuille blanche.*
- *Inscrivez vos NOM, prénom et numéro d'ordre sur chaque feuille.*
- *Préparez votre carte d'identité sur votre table.*
- *L'examen se termine à 12h00.*

Question I

On considère la fonction

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + \alpha^2})$$

où $\alpha > 0$ est un paramètre réel.

i. Déterminez le domaine de définition de f.

ii. Identifiez les éventuels extrema locaux de f.

iii. Identifiez les éventuels points d'inflexion du graphe de f.

iv. Déterminez toutes les valeurs de α pour lesquelles f est une fonction impaire.

Question II

Compte tenu de la résistance de l'air, la vitesse de chute d'un corps de masse m initialement abandonné sans vitesse est donnée par

$$v = \frac{mg}{c}\left[1 - \exp\left(-\frac{ct}{m}\right)\right]$$

où g désigne l'accélération de pesanteur, t est le temps et c est le coefficient de frottement fluide. Tous les paramètres sont strictement positifs.

i. Calculez la vitesse limite de chute, soit $v_\infty = \lim\limits_{t\to+\infty} v$ (en considérant m, g et c fixés).

ii. Calculez la vitesse de chute lorsque la résistance de l'air devient négligeable, soit $v_0 = \lim\limits_{c\to 0} v$ (en considérant m, g et t fixés).

iii. Calculez la vitesse de chute d'un corps très lourd, soit $v_m = \lim\limits_{m\to+\infty} v$ (en considérant c, g et t fixés).

Question III

Calculez les expressions suivantes :

i. $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{2x+1}\, dx$

ii. $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\, dx$

iii. $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{arctg} x\, dx$

iv. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x}}$ pour $x > 0$.

SOLUTION TYPE

Question I

Soit la fonction à étudier

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + \alpha^2})$$

où $\alpha > 0$ est un paramètre réel.

i. La fonction logarithme étant définie sur $]0, +\infty[$, la fonction f est définie pour les valeurs de x telles que

$$x + \sqrt{x^2 + \alpha^2} > 0$$

Cette inégalité étant toujours vérifiée si $\alpha > 0$, on en déduit que f est définie sur $\mathbb{R}$ pour tout $\alpha > 0$.

ii. Pour rechercher les éventuels extrema, on calcule

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + \alpha^2}} \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + \alpha^2}}\right) \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + \alpha^2}} \frac{\sqrt{x^2 + \alpha^2} + x}{\sqrt{x^2 + \alpha^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + \alpha^2}} > 0 \end{aligned}$$

La fonction est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et ne présente pas d'extremum.

iii. Une nouvelle dérivation conduit à

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left[(x^2 + \alpha^2)^{-1/2}\right]' = -\frac{1}{2}(x^2 + \alpha^2)^{-3/2}(2x) \\ &= -\frac{x}{(x^2 + \alpha^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

dont le seul zéro et situé en $x = 0$.

x		0	
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\smile$	P.I.	$\frown$

La dérivée seconde s'annulant et changeant de signe en $x = 0$, le graphe présente un point d'inflexion en ce point où $f(0) = \ln \alpha$. Le graphe de f tourne sa concavité vers le haut à gauche de $x = 0$ et vers le bas à droite de $x = 0$.

iv. La fonction est impaire si $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, soit si

$$\ln(-x + \sqrt{x^2 + \alpha^2}) = -\ln(x + \sqrt{x^2 + \alpha^2})$$

ou encore

$$\begin{aligned} 0 &= \ln(-x + \sqrt{x^2 + \alpha^2}) + \ln(x + \sqrt{x^2 + \alpha^2}) \\ &= \ln\left[(-x + \sqrt{x^2 + \alpha^2})(x + \sqrt{x^2 + \alpha^2})\right] \\ &= \ln \alpha^2 = 2 \ln \alpha \end{aligned}$$

La fonction étudiée est donc impaire pour la seule valeur de $\alpha = 1$.

Question II

Soit

$$v = \frac{mg}{c}\left(1 - \mathrm{e}^{-ct/m}\right)$$

i. La vitesse limite de chute est donnée par

$$v_\infty = \frac{mg}{c}\lim_{t\to+\infty}\left(1 - \mathrm{e}^{-ct/m}\right) = \frac{mg}{c}$$

ii. Si la résistance de l'air devient négligeable, on a

$$\begin{aligned} v_0 &= mg\lim_{c\to 0}\frac{1-\mathrm{e}^{-ct/m}}{c} = mg\left[\frac{0}{0}\right] \\ &= mg\lim_{c\to 0}\frac{(t/m)\,\mathrm{e}^{-ct/m}}{1} = gt \end{aligned}$$

où on a utilisé l'Hopital pour lever l'indétermination.

iii. Dans le cas d'un objet très pesant, la vitesse de chute devient

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{g}{c}\lim_{m\to+\infty} m\left(1 - \mathrm{e}^{-ct/m}\right) = \frac{g}{c}\left[\infty\cdot 0\right] \\ &= \frac{g}{c}\lim_{m\to+\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{-ct/m}}{1/m} = \frac{g}{c}\left[\frac{0}{0}\right] \\ &= \frac{g}{c}\lim_{m\to+\infty}\frac{(-ct/m^2)\,\mathrm{e}^{-ct/m}}{(-1/m^2)} \\ &= \frac{g}{c}(ct) = gt \end{aligned}$$

où on a utilisé l'Hopital pour lever l'indétermination.

Question III

i. $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx = \left[\frac{1}{3}(2x+1)^{3/2}\right]_0^4 = \frac{1}{3}(27-1) = \frac{26}{3}$

ii. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x}dx = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}$

iii. Pour calculer $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{arctg} x\, dx$, on applique la formule d'intégration par parties

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

avec

$$\begin{cases} f'(x) = 1 \\ g(x) = \operatorname{arctg} x \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) = x \\ g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \end{cases}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \int_0^1 \operatorname{arctg} x\, dx &= \Big[x \operatorname{arctg} x\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx \\ &= \frac{\pi}{4} - \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2} \end{aligned}$$

iv. Par le changement de variable

$$\sqrt{x} = t, \qquad \frac{dx}{2\sqrt{x}} = dt$$

on peut transformer la primitive selon

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x}} &= 2\int \frac{dt}{1+t} \\ &= 2\,\ln(1+t) + C\end{aligned}$$

Exprimant ce résultat en fonction de la variable d'origine, il vient

$$\int \frac{dx}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x}} = 2\,\ln(1+\sqrt{x}) + C$$