Université de Liège
Prof. Vincent DENOEL

Admission aux Etudes d'Ingenieur Civil
Épreuve d'analyse

Septembre 2015

Consignes :
— Répondez aux trois questions sur des feuilles séparées. Si vous ne répondez pas à une question, remettez une feuille blanche.
— Inscrivez vos NOM, prénom et numéro d'ordre sur chaque feuille.
— Préparez votre carte d'identité sur votre table.
— L'examen se termine à 12h00.

Question I

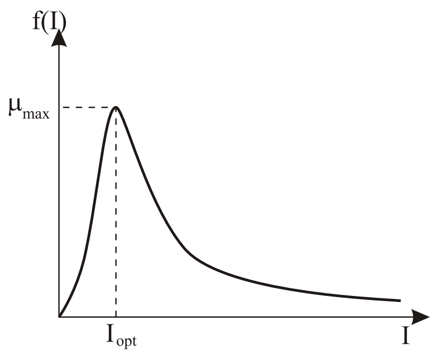
La fonction arch, appelée arccosinus hyperùbolique, peut être définie par

$$\operatorname{arch}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right).$$

Déterminez le domaine de définition de la fonction arch, ses éventuelles asymptotes ainsi que les éventuels extrema, points d'inflexion et points à tangente verticale de son graphe. Sur base des résultats obtenus, esquissez le graphe de $\operatorname{arch}(x)$, en illustrant bien la concordance avec vos résultats préalables.

Question II

Par une série d'expériences réalisées dans des conditions d'éclairement contrôlées, on détermine que le taux de croissance d'une variété de légumineuse peut être décrit par la fonction $f(I)$ de l'éclairement I dont l'allure est représentée graphiquement ci-dessous.



Le taux de croissance
i. est positif,
ii. est nul sous un éclairement nul,
iii. est maximum et vaut μ_{max} (connu) pour un éclairement optimum I_{opt} (connu),
iv. tend vers zéro si l'éclairement tend vers l'infini.

Déterminez toutes les fonctions de la forme

$$f(I) = \frac{\alpha + \beta I}{1 + \delta I + \varepsilon I^2}$$

permettant de traduire la dépendance du taux de croissance en l'éclairement I en exprimant les constantes apparaissant dans cette expression en fonction des paramètres μ_{max}, I_{opt} positifs mesurés expérimentalement. Veillez à simplifier votre résultat au maximum.

Question III

On considère les intégrales

$$I_n = \int_0^1 \frac{x}{1+x^n}\mathrm{d}x, \qquad n \in \mathbb{Q}.$$

i. Calculez I_0,$I_{1/2}$, I_1, I_2 et I_4.
ii. Montrez que

$$I_n \leq I_{n+1} \leq \frac{1}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Question I

 # Domaine de définition

L'argument de la fonction ln doit être défini et strictement positif, ce qui conduit aux conditions

$$x^2 - 1 \geq 0 \qquad \text{et} \qquad x + \sqrt{x^2 - 1} > 0.$$

La première de ces conditions implique que $x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty]$. Quant à la seconde, elle implique

$$\sqrt{x^2 - 1} > -x.$$

Donc,

— si $x \leq -1$, les deux membres de l'inégalité sont positifs et, en élevant au carré, on obtient $x^2 - 1 > x^2$, ce qui est impossible ;

— si $x \geq 1$, le membre de gauche de l'inégalité est positif tandis que celui de droite est négatif et l'inégalité est vérifiée de facto.

Le domaine de définition de la fonction $\operatorname{arch}(x)$ est donc $[1, +\infty[$.

 # Asymptotes

Il est possible qu'il existe une asymptote horizontale ou oblique, pour $x \to +\infty$, vu le domaine de définition. On calcule donc

$$\lim_{x \to +\infty} \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) = +\infty$$

ce qui montre qu'il n'existe pas d'asymptote horizontale et

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)}{x} = \text{"}\frac{+\infty}{+\infty}\text{"} \underset{(H)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)'}{1},$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)}{1} = 0$$

par application du théorème de l'Hospital et car $\lim_{x \to +\infty} x/\sqrt{x^2 - 1} = 1$. Il n'y a pas d'asymptote oblique non plus.

Il n'y a pas d'asymptote verticale, en raison de la continuité de la fonction sur son domaine de définition $[1, +\infty[$.

 # Extrema et Points d'inflexion

On calcule successivement les deux premières dérivées de la fonction à étudier

$$(\operatorname{arch})'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

$$(\operatorname{arch})''(x) = \left(\left(x^2 - 1\right)^{-\frac{1}{2}}\right)' = \frac{-x}{(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}.$$

L'étude de signe de ces dérivées donne

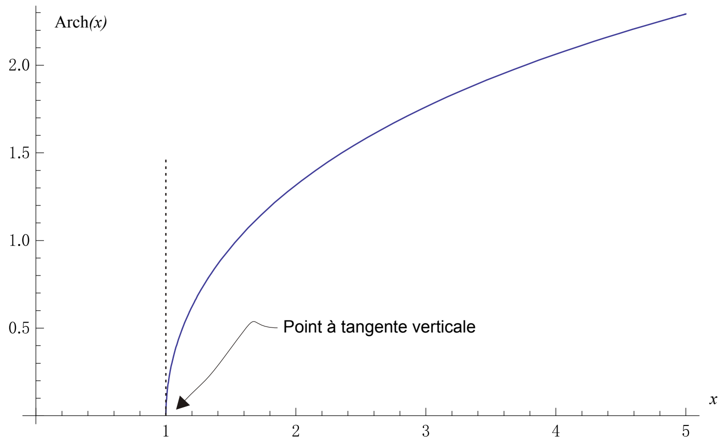
x		1	
$(\operatorname{arch})'(x)$		$\nexists$	$+$
$(\operatorname{arch})''(x)$		$\nexists$	$-$
$\operatorname{arch}(x)$	$\nexists$	Tg.V.	$\nearrow$
		$(1, 0)$	$\frown$

On peut vérifier que

$$\lim_{x\to 1^+} (\mathrm{arch})'(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty,$$

ce qui justifie que le point d'abscisse $x = 1$ est un point à tangente verticale.

 # Esquisse de la fonction



Question II

Soit la fonction

$$f(I) = \frac{\alpha + \beta I}{1 + \delta I + \varepsilon I^2}.$$

Puisque le taux de croissance est nul à éclairement nul, $f(0) = 0$, et donc $\alpha = 0$. Pour éviter toute solution triviale, il convient donc également que $\beta \neq 0$.

Le taux de croissance doit également tendre vers 0 pour $I \to +\infty$. En observant que

$$\lim_{I\to+\infty} f(I) = \begin{cases} 0 & \text{si } \varepsilon \neq 0, \\ \frac{\beta}{\delta} \neq 0 & \text{si } \varepsilon = 0, \end{cases}$$

on peut conclure que ε doit nécessairement être non nul. La fonction que nous cherchons s'écrit donc

$$f(I) = \beta \frac{I}{1 + \delta I + \varepsilon I^2}$$

avec $\beta \neq 0$ et $\varepsilon \neq 0$. On sait également que $f(I)$ présente un optimum qui vaut $\mu_{\max}$ en $I = I_{opt}$, soit deux informations supplémentaires qui devraient réduire de deux unités le nombre de paramètres de ce problème. La dérivée première

$$f'(I) = \beta \frac{1 + \delta I + \varepsilon I^2 - I(\delta + 2\varepsilon I)}{(1 + \delta I + \varepsilon I^2)^2} = \beta \frac{1 - \varepsilon I^2}{(1 + \delta I + \varepsilon I^2)^2}$$

doit s'annuler lorsque $I = I_{opt}$ et donc il faut que $\varepsilon = 1/I_{opt}^2$. Par ailleurs, la valeur de la fonction $f(I)$ prise en I_{opt} vaut $\mu_{\max}$, donc

$$f(I_{opt}) = \beta \frac{I_{opt}}{1 + \delta I_{opt} + \varepsilon I_{opt}^2} = \beta \frac{I_{opt}}{2 + \delta I_{opt}} = \mu_{\max}.$$

Ceci conduit à

$$\delta = \frac{\beta}{\mu_{\max}} - \frac{2}{I_{opt}}.$$

Finalement, on obtient l'expression paramétrique suivante pour $f(I)$, avec β comme seul et unique paramètre,

$$f(I) = \beta \frac{I}{1 + \left(\frac{\beta}{\mu \max} - \frac{2}{I_{opt}}\right) I + \frac{I^2}{I_{opt}^2}} = \beta \frac{I}{\left(1 - \frac{I}{I_{opt}}\right)^2 + \frac{\beta}{\mu \max} I}$$

où la seule restriction est $\beta > 0$, pour que le taux de croissance à modéliser soit positif. Notons qu'en posant $\beta = \mu \max b^2 / I_{opt}$ et $i = I/I_{opt}$, on peut également écrire cette loi sous une forme *adimensionnelle*

$$\frac{f(I)}{\mu \max} = \frac{i}{\left(\frac{i-1}{b}\right)^2 + i}$$

et le paramètre b apparaît comme un paramètre d'étalement autour du pic de croissance.

Question III

i. On trouve les trois intégrales correspondant à $n = 0$, 1 et 2 par intégration directe

$$I_0 = \int_0^1 \frac{x}{1+1} \mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4} = 0.25,$$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x} \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1+x}{1+x} - \frac{1}{1+x} \mathrm{d}x = [x - \ln(1+x)]_0^1 = 1 - \ln 2 \simeq 0.307,$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2} \ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2\% \simeq 0.347.$$

On évalue $I_{1/2}$ à l'aide du changement de variable $t = 1 + \sqrt{x}$, soit $\mathrm{d}t = \mathrm{d}x / \left(2\sqrt{x}\right)$, ce qui donne

$$I_{1/2} = \int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{x}} \mathrm{d}x = 2 \int_1^2 \frac{(t-1)^3}{t} \mathrm{d}t == 2 \int_1^2 t^2 - 3t + 3 - \frac{1}{t} \mathrm{d}t = 2 \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 3t - \ln t\right]_1^2 = \frac{5}{3} - 2\ln 2 \simeq 0.280.$$

Quant à I_4, on l'évalue à l'aide du changement de variable $t = x^2$, soit $\mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x$, ce qui donne

$$I_4 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^4} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \left[\frac{1}{2} \mathrm{arctg}\; t\right]_0^1 = \frac{\pi}{8} \simeq 0.393.$$

ii. On peut démontrer que $I_n \leq I_{n+1}$ est observant que

$$\frac{x}{1+x^n} \leq \frac{x}{1+x^{n+1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

lorsque $x \in [0,1]$ (puisque $1 \geq x^n \geq x^{n+1} \geq 0$ dans ces conditions). On peut intégrer cette inégalité membre à membre, ce qui donne le résultat cherché. Une autre méthode consisterait à démontrer que $I_n - I_{n+1} \leq 0$. Il convient alors de calculer

$$\begin{aligned} I_n - I_{n+1} &= \int\limits_0^1 \frac{x}{1+x^n} - \frac{x}{1+x^{n+1}} \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \frac{x\left(1+x^{n+1}-1-x^n\right)}{\left(1+x^n\right)\left(1+x^{n+1}\right)} \mathrm{d}x \\ &= \int\limits_0^1 \frac{x^{n+1}\left(x-1\right)}{\left(1+x^n\right)\left(1+x^{n+1}\right)} \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

qui est bien négatif, puisque la fonction à intégrer est partout négative sur l'intervalle $[0;1]$.

On démontre maintenant que $I_n \leq \frac{1}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Les résultats du point (i.) montrent que $I_n \leq \frac{1}{2}$ pour $n \in \{0, 1, 2, 4\}$. Par ailleurs, comme démontré ci-dessus, la suite des I_n est croissante, i.e. $I_n \leq I_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Lorsque n est grand, x^n devient petit par rapport à 1 au dénominateur de l'intégrand. Pour toutes les valeurs entières de n, on a

$$1 + x^n \geq 1 \qquad \forall x \in [0, 1]$$

Dès lors

$$\frac{x}{1+x^n} \leq x \qquad \forall x \in [0, 1]$$

et

$$I_n = \int\limits_0^1 \frac{x}{1+x^n} \mathrm{d}x \leq \int\limits_0^1 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$