Université de Liège

Prof. Éric J.M. DELHEZ
Prof. Vincent DENOËL

ADMISSION AUX ÉTUDES D'INGÉNIEUR CIVIL
ÉPREUVE D'ANALYSE

Juillet 2016

Consignes :
- *Répondez aux trois questions sur des feuilles séparées.*
  Si vous ne répondez pas à une question, remettez une feuille blanche.
- *Inscrivez vos NOM, prénom et numéro d'ordre sur chaque feuille.*
- *Préparez votre carte d'identité sur votre table.*
- *L'examen se termine à 12h00.*

Question I

Soit la fonction

$$f(x) = \frac{x^2 - a^2}{x^3 - a^3}$$

où a représente un paramètre réel non nul.

En discutant s'il y a lieu en fonction de a,

i. déterminez le domaine de définition de la fonction f et ses éventuelles asymptotes ;
ii. étudiez la croissance/décroissance de f et caractérisez ses éventuels extrema ;
iii. sur base des informations recueillies, esquissez le graphe de f.

Question II

i. Calculez

$$I_0 = \int \ln x \, \mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad I_1 = \int x \ln x \, dx$$

ii. Pour tout $\ell \in]0,1[$, on définit

$$J_n(\ell) = \int_\ell^1 x^n \ln x \, dx \qquad \text{où} \quad n \in \mathbb{N}$$

Calculez

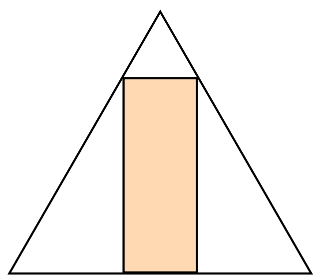
$$\lim_{\ell \to 0^+} J_n(\ell)$$

iii. Calculez

$$\int_0^1 x \sqrt{1 - x^2} \, dx$$

Question III

On inscrit un rectangle dans un triangle équilatéral en faisant en sorte qu'un côté du rectangle s'appuie sur un côté du triangle comme illustré ci-contre.
Quelle est la fraction maximale de la surface du triangle qui peut être ainsi recouverte ?



Question I

i. La fonction est définie pour tous les x tels que

$$x^3 - a^3 \neq 0$$

soit

$$(x-a)(x^2+ax+a^2) \neq 0$$

Dans les conditions envisagées ($a \neq 0$), le discriminant du trinôme du second degré est toujours négatif, *i.e.*

$$\rho = a^2 - 4a^2 = -3a^2 < 0$$

Dès lors,

$$\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \backslash \{a\}$$

On peut cependant remarquer que

$$f(x) = \frac{(x-a)(x+a)}{(x-a)(x^2+ax+a^2)} = \frac{x+a}{x^2+ax+a^2}$$

et

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \frac{x+a}{x^2+ax+a^2} = \frac{2}{3a}$$

de sorte que la fonction ne possède pas d'asymptote verticale mais peut être prolongée continûment en $x = a$ en posant $f(a) = 2/(3a)$.

Les éventuelles asymptotes horizontales peuvent être identifiées en calculant

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x+a}{x^2+ax+a^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

ce qui montre que f approche l'asymptote horizontale $y = 0$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
Notons que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0^- \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^+$$

L'asymptote horizontale est donc approchée par valeurs inférieures au voisinage de $-\infty$ et par valeurs supérieures au voisinage de $+\infty$.
Comme f admet une asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$, il n'y a pas d'asymptote oblique.

ii. Pour identifier les éventuels extrema, on calcule

$$f'(x) = \left(\frac{x+a}{x^2+ax+a^2}\right)' = \frac{x^2+ax+a^2-(2x+a)(x+a)}{(x^2+ax+a^2)^2} = \frac{-x(x+2a)}{(x^2+ax+a^2)^2}$$

La dérivée première s'annule en $x_1 = 0$ et $x_2 = -2a$.

- Si $a > 0$, on a $x_2 < x_1 < a$ et on peut dresser le tableau de variation suivant

x		$-2a$		0		a	
$f'(x)$	-	0	+	0	-	$\nexists$	-
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$	Max	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$

  La fonction étant décroissante à gauche de $x_2 = -2a$ et croissante à droite, elle y présente un minimum local. De même, f étant croissante à gauche de $x_1 = 0$ et décroissante à droite, elle présente un maximum local en $x = 0$. On calcule aisément

$$f(-2a) = -\frac{1}{3a} < 0, \qquad f(0) = \frac{1}{a} > 0$$

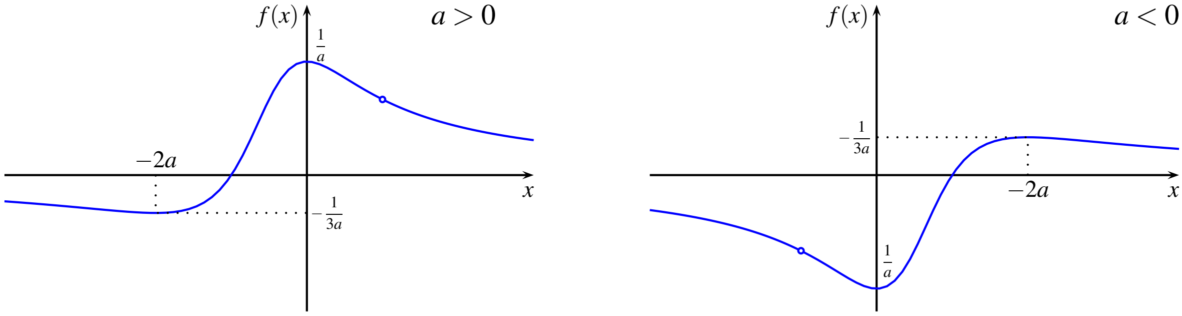
- Si $a < 0$, on a $a < x_1 < x_2$ et on peut dresser le tableau de variation suivant

x		a		0		$-2a$	
$f'(x)$	-	$\nexists$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	min	$\nearrow$	Max	$\searrow$

La fonction étant décroissante à gauche de $x_1 = 0$ et croissante à droite, elle y présente un minimum local. De même, f étant croissante à gauche de $x_2 = -2a$ et décroissante à droite, elle présente un maximum local en cette abscisse.
On a

$$f(-2a) = -\frac{1}{3a} > 0, \qquad f(0) = \frac{1}{a} < 0$$

iii. En rassemblant les résultats obtenus précédemment, on peut esquisser le graphe de f en distinguant les cas $a > 0$ et $a < 0$.



Question II

i. On calcule les primitives demandées par primitivation par parties

$$I_0 = \int (x)' \ln x \,\mathrm{d}x = x \ln x - \int \mathrm{d}x = -x + x \ln x + C$$

où C est une constante arbitraire.

$$I_1 = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x \,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} \mathrm{d}x = -\frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{2} \ln x + C$$

où C est une constante arbitraire.

ii. On peut calculer les intégrales demandées en intégrant à nouveau par parties

$$\begin{aligned} J_n(\ell) = \int_\ell^1 \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' \ln x \,dx &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x\right]_\ell^1 - \int_\ell^1 \frac{x^n}{n+1} dx \\ &= -\frac{\ell^{n+1}}{n+1} \ln \ell - \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_\ell^1 \\ &= -\frac{\ell^{n+1}}{n+1} \ln \ell + \frac{\ell^{n+1} - 1}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

Cette expression n'est pas définie pour $\ell = 0$. On peut cependant calculer

$$\lim_{\ell \to 0^+} J_n(\ell) = -\lim_{\ell \to 0^+} \left[\frac{\ell^{n+1}}{n+1} \ln \ell\right] - \frac{1}{(n+1)^2} = -\frac{1}{(n+1)^2}$$

puisque, par le théorème de l'Hospital, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{\ell \to 0^+} \ell^{n+1} \ln \ell = \lim_{\ell \to 0^+} \frac{\ln \ell}{\ell^{-(n+1)}} = \lim_{\ell \to 0^+} \frac{\frac{1}{\ell}}{-(n+1)\ell^{-(n+2)}} = -\frac{1}{n+1} \lim_{\ell \to 0^+} \ell^{n+1} = 0$$

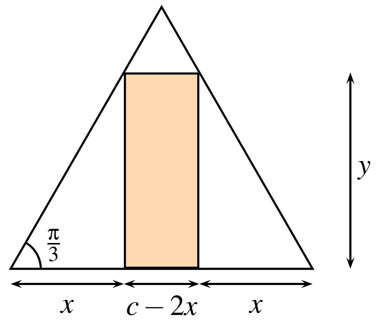
iii. Posant $t^2 = 1 - x^2$ avec $t > 0$, il vient $t\,dt = -x\,dx$ et

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\int_1^0 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Question III

Soit c le côté du triangle et x la longueur laissée libre sur le demi-côté de ce triangle (voir figure). La base du rectangle mesure $c-2x$. L'autre côté du rectangle a une longueur notée y telle que

$$y = x \text{ tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}x$$



L'aire du rectangle s'exprime donc par

$$S(x) = y(c-2x) = \sqrt{3}x(c-2x)$$

où seules les valeurs de x dans l'intervalle $[0, c/2]$ doivent être prises en compte.

Remarquons qu'on retrouve bien $S(0) = 0$ (le rectangle dégénère en un segment de droite correspondant à la base du triangle) et $S(c/2) = 0$ (le rectangle dégénère en un segment de droite correspondant à la hauteur du triangle). Entre ces deux extrêmes, l'aire du rectangle est naturellement positive et possède un extremum.

On calcule aisément

$$S'(x) = \sqrt{3}(-2x + c - 2x) = \sqrt{3}(c-4x)$$

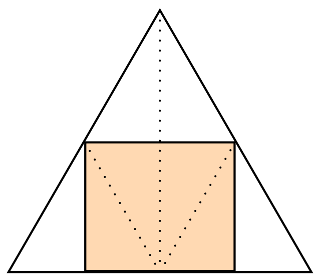
qui s'annule uniquement pour $x = c/4$. Les variations de S sont décrites par

x	0		c/4		$c/2$
$S'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$S(x)$	0	$\nearrow$	Max	$\searrow$	0

La surface est donc maximale pour $x = c/4$. Dans ce cas,

$$S(c/4) = \frac{c}{2}\frac{c}{4}\sqrt{3} = \frac{c^2\sqrt{3}}{8}$$

que l'on peut comparer à $c^2\sqrt{3}/4$, l'aire du triangle équilatéral. On dégage donc ainsi un taux de recouvrement du triangle de 50%, comme illustré ci-dessous.



Solution optimale