Synthèse de trigonométrie

Yvan Haine - Pierre Joris

Août 2012

Cette synthèse de trigonométrie a été rédigée suite à une suggestion de M. le Professeur E. Delhez.
Elle est destinée à aider les étudiants à préparer l'examen d'admission aux études d'ingénieur civil.
Son objectif est de proposer une synthèse des définitions et propriétés utiles. Aucun résultat énoncé n'est démontré. Si un étudiant souhaite obtenir une preuve des énoncés annoncés, nous le renvoyons à ses cours de l'enseignement secondaire.

Il ne faut pas considérer ce document comme une bible ! D'une part, il ne s'agit pas de notes de cours. Les notions ne sont pas toujours abordées dans le même ordre que lors de leur approche en classe. D'autre part, il est certainement pourvu de nombreux défauts : lacunes, imprécisions, manque d'exemples ou d'exercices, illustrations omises, lapsus ou fautes de frappe,...

Une étude par coeur du contenu de ce recueil n'est pas une bonne méthode pour se préparer et ne garantit en rien la réussite de l'examen.

Une annexe concernant la logique et différents type de démonstrations a été ajoutée à ce document dédié à la trigonométrie. Bien que ne faisant pas explicitement partie du programme de l'examen d'admission, quelques notions de logique mathématique permettent de mieux comprendre les notations utilisées lors de la résolution d'exercices.

La pratique de la résolution d'exercices et de problèmes est également indispensable. Nous renvoyons aux résolutions proposées par les examinateurs publiées ailleurs et à la dernière annexe de ce document. Nous savons que les résolutions publiées ici ne sont pas nécessairement les plus efficaces ou les plus élégantes. Elles mériteraient une relecture supplémentaire que nous n'avons pas le temps de faire aujourd'hui.

Toutes nos excuses pour les défauts figurant dans ces notes. Nous espérons profiter des commentaires et remarques des utilisateurs pour perfectionner cette première version pour les années ultérieures.
Tous nos remerciements au Professeur Delhez pour ses relectures et ses nombreux conseils avisés.

Yvan Haine, Pierre Joris

Chapitre 1

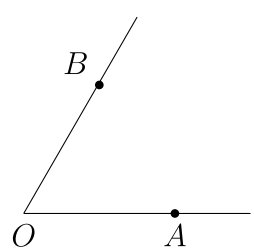
Définitions

1.1 Notions de base

1.1.1 Angles et mesures d'angles

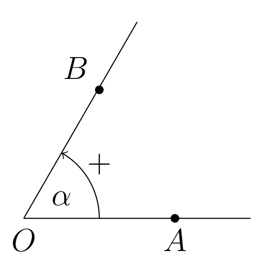
Angles orientés

Un *angle orienté* de sommet O est un couple de 2 demi-droites de même origine $([OA, [OB)$. Les deux demi-droites sont appelées les côtés de l'angle.



On distingue deux sens :

- le sens positif ou *trigonométrique* qui est le sens contraire aux aiguilles d'une montre
- le sens négatif qui est le sens dans lequel tournent les aiguilles d'une montre.



L'*amplitude* d'un angle se mesure en degrés ou en radians. Elle est précédée du signe + si l'angle orienté est de sens positif et du signe – dans l'autre cas.

Angles particuliers

- L'angle *plat* est l'angle dont les côtés sont dans le prolongement l'un de l'autre.
- L'angle *droit* est la moitié d'un angle plat.
- L'angle *nul* est l'angle dont les côtés sont superposés.

Degré

On mesure l'amplitude d'un angle tracé sur une feuille à l'aide d'un rapporteur. Le *degré* est l'unité de mesure d'angle tel que l'angle plat a une amplitude de 180°. Par conséquent, l'angle droit a une amplitude de 90°.

Les sous-unités du degré sont la *minute* (') et la *seconde*(") : 60' = 1° et 60" = 1'. Lorsqu'un angle est exprimé en degrés, minutes, secondes (DMS), on parle aussi de degrés *sexagésimaux*. Parfois, on utilise aussi les degrés *décimaux* (DD) : il s'agit d'une écriture dans laquelle la partie non entière est écrite sous forme décimale.

Exemple

$3^\circ 15' = 3{,}25^\circ$

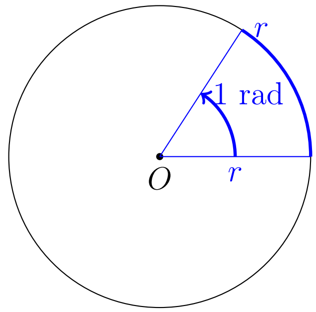
Remarque

Savoir convertir des amplitudes DMS en DD et inversement.

Le radian

Définition

Le *radian* est l'amplitude d'un angle au centre d'un cercle qui intercepte un arc de longueur égale au rayon du cercle.



Remarques

Cette définition est indépendante du rayon du cercle et de l'angle au centre choisis.

Lorsque l'amplitude d'un angle est exprimée en radians, on fait généralement suivre le nombre de l'abréviation "rad". Si un angle a une amplitude qui est une fraction ou un multiple de π, on omet l'abréviation "rad".

Conversion degrés-radians

Un radian équivaut à $\frac{180^\circ}{\pi}$.

Les conversions d'angles remarquables sont dans le tableau suivant˜ :

Degres	0	30	45	60	90	180
Radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π

Remarque

On évitera de mélanger les deux unités de mesures dans une même expression : ainsi, on n'écrira jamais $x = 30^\circ + 2k\pi$ mais bien $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou encore $x = 30^\circ + k360^\circ$.

Angles associés

- Deux angles sont *opposés* ssi leur somme est égale à 0. Les angles α et $-\alpha$ sont opposés.
- Deux angles sont *complémentaires* ssi leur somme est un angle droit. Les angles α et $90^\circ - \alpha$ sont complémentaires.
- Deux angles sont *supplémentaires* ssi leur somme est un angle plat. Les angles α et $180^\circ - \alpha$ sont supplémentaires.
- Deux angles sont *anticomplémentaires* ssi la valeur absolue de leur différence est un angle droit. Les angles α et $90^\circ + \alpha$ sont anticomplémentaires.

- Deux angles sont *antisupplémentaires* ssi la valeur absolue de leur différence est un angle plat. Les angles α et $180^\circ + \alpha$ sont antisupplémentaires.

1.1.2 Longueur d'un arc et aire d'un secteur

Propriétés

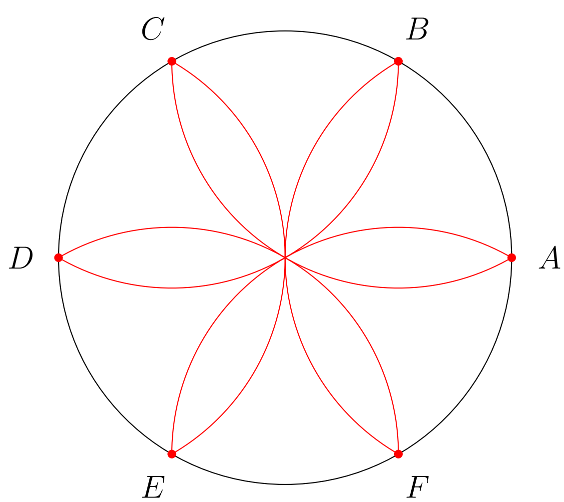
La longueur d'un cercle de rayon R vaut $2\pi R$ et son aire vaut πR^2.

Conséquences

- Un arc d'un cercle de rayon R a pour longueur $R\theta$ où θ est l'amplitude en radians de l'angle au centre interceptant l'arc.
- Un secteur d'un cercle de rayon R a pour aire $\dfrac{R^2 \cdot \theta}{2}$ où θ est l'amplitude d'un angle au centre interceptant l'arc du secteur.

Exercices

1. On considère la rosace ci-dessous où les points A, B, C, D, E et F sont les sommets d'un hexagone régulier inscrit dans un cercle d'un rayon de 3 cm.



   (a) Calculer la longueur du plus petit arc AB.

   (b) Calculer la longueur du plus petit arc BF.

   (c) Calculer la longueur totale de la rosace.

   (d) Calculer l'aire de la rosace.

2. Simon et Lise mangent ensemble deux pizzas, une grande de 25 cm de diamètre et une petite de 20 cm de diamètre. Simon réclame deux tiers de la grande pizza. Quelle portion de la petite pizza Lise doit-elle manger pour avoir la même quantité que son frère ?

3. Les villes de Saint-Denis (île de la Réunion) et de Victoria (île Mahé, Seychelles) sont situées sur le même méridien avec pour latitudes respectives 20,52° Sud et 4,38° Sud. Calculer la distance entre ces deux villes en suivant le méridien sachant que le rayon terrestre vaut 6400 km.

4. Des bruxellois partent en vacances vers le sud de l'Espagne en suivant le même méridien et parcourent 2500 km. Sachant que la latitude de Bruxelles est de 51° N et que le rayon de la Terre est de 6400 km, calculer la latitude du lieu de vacances ?

5. Un satellite géostationnaire a une trajectoire circulaire autour de la Terre à une altitude de 36 000 km ; il reste toujours à la verticale d'un point fixe sur la Terre. En supposant que le rayon terrestre est de 6400 km, calculer la longueur d'une révolution autour de la Terre ainsi que la vitesse du satellite.

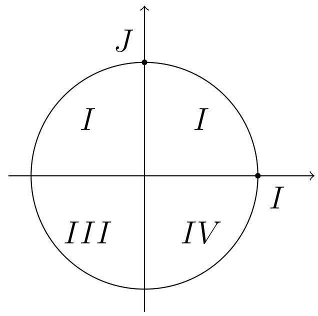
6. Vers 284-195 avant J.C., le mathématicien et astronome grec Ératosthène fut le premier à évaluer correctement le rayon de la Terre. Il choisit les villes de Syène (point A) et d'Alexandrie (point B) se trouvant sur le même méridien et distantes de 800 km. Il a constaté que lorsque le Soleil est à la verticale de Syène, l'ombre d'un obélisque de 1 m planté verticalement en B mesure 12,6 cm. Déterminer le rayon terrestre.

1.2 Cercle trigonométrique

1.2.1 Définitions

Cercle trigonométrique

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, le *cercle trigonométrique* est le cercle de centre O, de rayon 1.

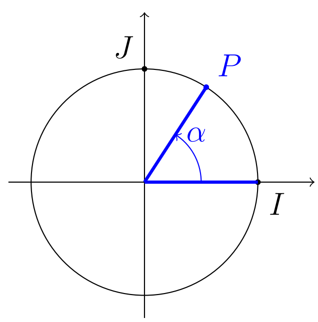


Le cercle trigonométrique est divisé par les axes en 4 parts appelées *quadrants*, généralement numérotés de I à IV.

Angle orienté rapporté au cercle trigonométrique

Un *angle orienté rapporté au cercle trigonométrique* est un angle orienté dont le sommet est le centre du cercle et dont le premier côté est la demi-droite $[OI$.

Le *point-image* d'un angle orienté rapporté au cercle trigonométrique est le point d'intersection P du deuxième côté de l'angle avec le cercle trigonométrique.



1.2.2 Propriétés

A chaque angle correspond un point-image, mais la réciproque n'est pas vraie : à un point-image donné correspondent une infinité d'angles orientés dont les amplitudes sont égales à un multiple entier de 360° ou 2π radians près. Tous les angles $\alpha + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ ont le même point image.

Dans la suite de ces notes, nous désignerons généralement par I le point image des angles d'amplitude $2k\pi(k \in \mathbb{Z})$ et par J le point image des angles d'amplitude $\frac{\pi}{2} + 2k\pi(k \in \mathbb{Z})$

1.3 Sinus et cosinus d'un angle orienté

À chaque angle, on associe 4 grandeurs appelées *nombres trigonométriques* : le sinus, le cosinus, la tangente et la cotangente.

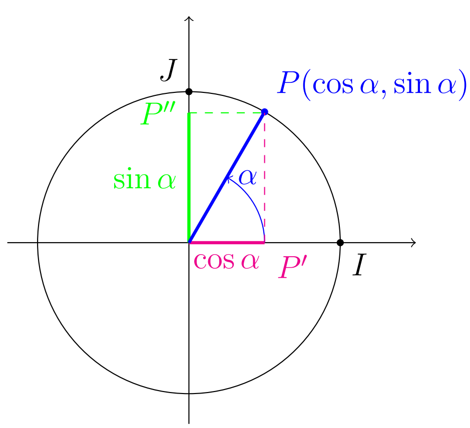
Remarque

Les définitions suivantes constituent une extension du sinus, cosinus et de la tangente d'un angle aigu d'un triangle rectangle.

1.3.1 Définitions

Considérons l'angle orienté α et son point image P. On note P' et P'' les projections orthogonales de P sur OI et OJ.

- Le *cosinus* de l'angle orienté α est l'abscisse de son point image dans le cercle trigonométrique. Il se note $\cos\alpha$.
- Le *sinus* de l'angle orienté α est l'ordonnée son point image dans le cercle trigonométrique. Il se note $\sin\alpha$.



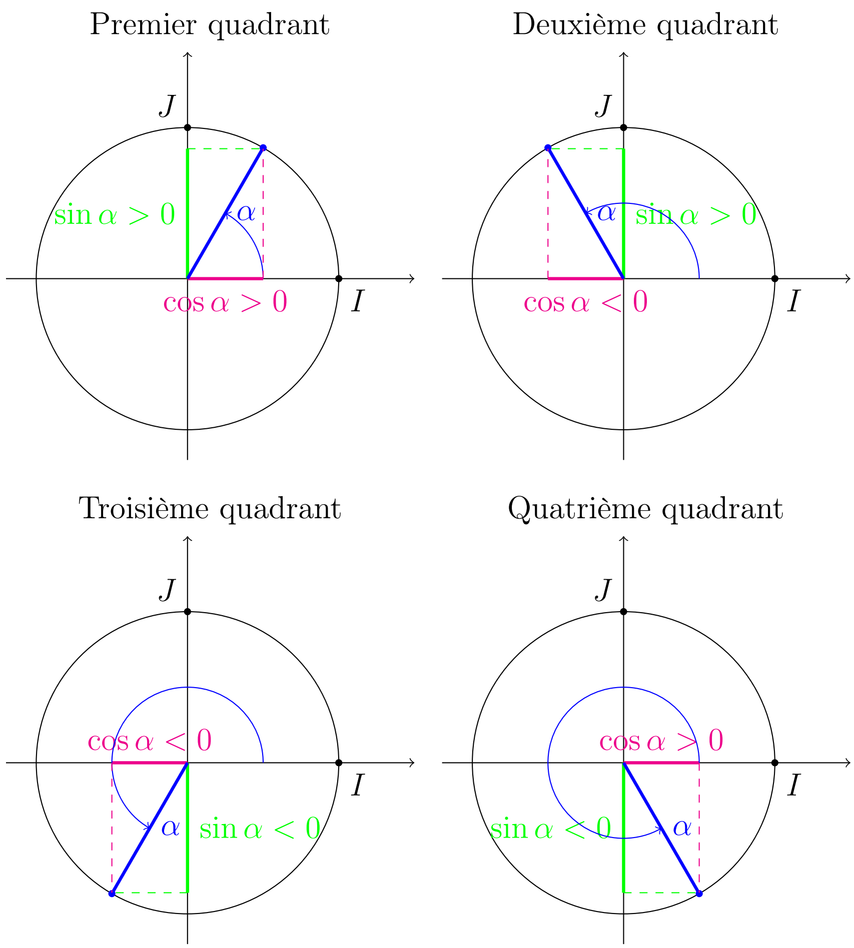
Conséquence

Le sinus et le cosinus d'un angle orienté sont compris entre -1 et 1.

Remarque

On évitera de dire que le sinus est la longueur de la projection du segment $[OP]$ sur l'axe Oy ou que le cosinus est la longueur de la projection du segment $[OP]$ sur l'axe Ox. Une longueur est toujours positive, l'abscisse ou l'ordonnée d'un point peut être négative.

1.3.2 Signe du sinus et du cosinus



α	0		90°		180°		270°		360°
α	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$3\frac{\pi}{2}$		2π
$\sin\alpha$	0	+	1	+	0	-	-1	-	0
$\cos\alpha$	1	+	0	-	-1	-	0	+	1

1.3.3 Relation fondamentale de la trigonométrie

Pour tout angle orienté α,

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

1.4 Tangente et cotangente d'un angle orienté

Considérons l'angle orienté α.

1.4.1 Définitions

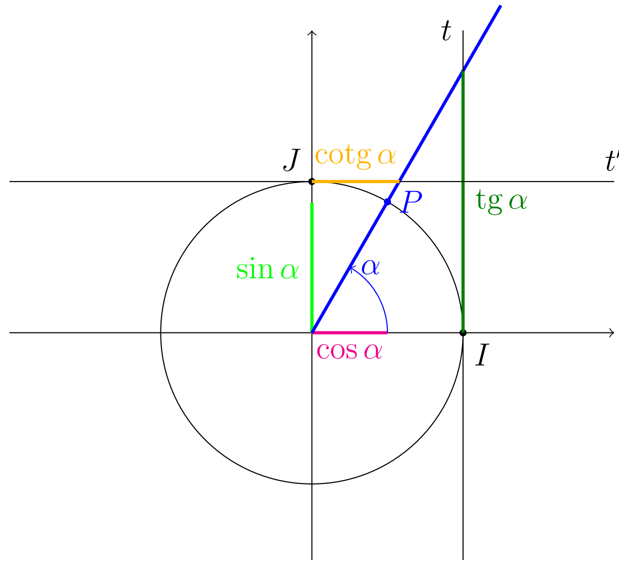
- Soit t la tangente au cercle trigonométrique passant par I.

  La *tangente* de l'angle orienté α est l'ordonnée du point d'intersection T du 2^{eme} côté de l'angle α et de la droite t. Elle se note $\operatorname{tg}\alpha$ ou $\tan\alpha$.
- Soit t' la tangente au cercle trigonométrique passant par J.

  La *cotangente* de l'angle orienté α est l'abscisse du point d'intersection T' du 2^{eme} côté de l'angle α et de la droite t'. Elle se note $\operatorname{cotg}\alpha$ ou $\cot\alpha$.

Remarque

On évitera de dire que la tangente et la cotangente d'un angle sont des longueurs de segment. Une longueur est toujours positive, l'abscisse ou l'ordonnée d'un point peut être négative.



Existence

- La tangente d'un angle α existe si et seulement si son 2[eme] côté $[OP$ n'est pas parallèle à t ou OJ càd si l'angle α est différent de $90^\circ + k\ 180^\circ$ ou $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.
- La cotangente d'un angle α existe si et seulement si son deuxième côté $[OP$ n'est pas parallèle à OI càd si l'angle α est différent de $k180^\circ$ ou $k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

1.4.2 Signe de la tangente et de la cotangente

α	0		90°		180°		270°		360°
α	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$3\frac{\pi}{2}$		2π
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$+$	$\nexists$	-	0	$+$	$\nexists$	-	0
$\operatorname{cotg}\alpha$	$\nexists$	$+$	0	-	$\nexists$	$+$	0	$+$	$\nexists$

1.4.3 Liens entre les nombres trigonométriques

Les formules suivantes peuvent être établies facilement

- $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \forall\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$
- $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \forall\alpha \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$
- $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}, \forall\alpha \neq k\dfrac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$

1.4.4 Identités

A l'aide de la formule fondamentale, on peut prouver rapidement que

- $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}, \forall\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$
- $1 + \operatorname{cotg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}, \forall\alpha \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$

1.5 Sécante et cosécante

A titre d'information, donnons la définition de la sécante ($\sec\alpha$) et de la cosecante ($\operatorname{cosec}\alpha$) :

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \forall\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

et

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}, \forall\alpha \neq k\pi$$

1.6 Angles remarquables

Les nombres trigonométriques ont des valeurs remarquables. Elles sont reprises dans le tableau ci-dessous.

α en degrés	0	30	45	60	90
α en rad.	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$
$\operatorname{cotg}\alpha$	$\nexists$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

1.7 Exercices

1. Factoriser et simplifier chacune des expressions suivantes :
   (a) $\cos x - \cos^3 x$
   (b) $\sin x - \sin^3 x$
   (c) $\sin^3 x + \sin x \cos^2 x$
2. Démontrer les identités suivantes : [1]
   (a) $\sin^2 x - \cos^2 x = 1 - 2\cos^2 x$
   (b) $\cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$
   (c) $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 x - \cos^2 x$
   (d) $\sin^2\alpha - \cos^2\beta = \sin^2\beta - \cos^2\alpha$
3. Démontrer les identités suivantes en précisant les conditions d'existence :
   (a) $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = \dfrac{1}{\sin x \cdot \cos x}$
   (b) $\dfrac{\operatorname{cotg}^2 x}{1 + \operatorname{cotg}^2 x} = \cos^2 x$
   (c) $\dfrac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \sin x \cdot \cos x$

1. Quelques conseils au sujet des démonstrations d'identités se trouvent dans un chapitre suivant.

(d) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = \dfrac{\operatorname{cotg}\beta}{\operatorname{cotg}\alpha}$

4. Démontrer que les expressions suivantes sont indépendantes de α

   (a) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$

   (b) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha)^2 - (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{cotg}\alpha)^2$

5. Démontrer les identités suivantes

   (a) $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x$

   (b) $\sin^6 x - \cos^6 x = (\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cdot \cos x)(1 - \sin x \cdot \cos x)$

Chapitre 2

Equations trigonométriques élémentaires

Une *équation trigonométrique* est une équation dans laquelle l'inconnue apparaît par l'intermédiaire d'un nombre trigonométrique.
Pour résoudre une équation trigonométrique, on essaie généralement de la transformer en une ou plusieurs équations trigonométriques "de base" dont la résolution est expliquée dans les paragraphes suivants. Chacune de ces équations donne un ensemble de solutions.
Ces équations fondamentales se résolvent à l'aide de principes d'équivalence qui les transforment en équation(s) algébrique(s) équivalentes.
Contrairement aux équations algébriques, une équation trigonométrique admet une infinité de solutions. Les solutions comprises dans l'intervalle $[0, 2\pi[$ sont dites *solutions fondamentales*.
Il est courant de devoir représenter les solutions fondamentales sur le cercle trigonométrique. C'est d'ailleurs souvent la méthode la plus simple pour comparer des ensembles de solutions qui paraissent différents.

2.1 Principes d'équivalence fondamentaux

Les principes d'équivalence suivants sont fondamentaux. Ils sont dérivés directement des propriétés des angles associés.

2.1.1 Angles opposés

Deux angles opposés ont des cosinus égaux et des sinus, des tangentes et des cotangentes opposés

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha, \quad \operatorname{cotg}(-\alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha$$

Réciproquement :

Deux angles qui ont le même cosinus sont soit égaux à $2k\pi$ près, soit opposés à $2k\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$).

Principe d'équivalence

On en déduit le principe d'équivalence

$$\cos x = \cos a \Leftrightarrow x = a + 2k\pi \text{ ou } x = -a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Exemple

Résoudre l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$

On a

$$\begin{aligned} \cos x = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{3} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions sera dans ce cas

$$S = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$$

◇

Remarque

Il y a quelques cas particuliers où la forme générale des solutions peut se résumer en une seule famille :

- $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi$
- $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi$
- $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

2.1.2 Angles supplémentaires

Deux angles supplémentaires ont des sinus égaux et des cosinus, des tangentes et des cotangentes opposés

$$\begin{aligned} \sin(\pi - \alpha) &= \sin \alpha, \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha \\ \operatorname{tg}(\pi - \alpha) &= -\operatorname{tg} \alpha, \quad \operatorname{cotg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{cotg} \alpha \end{aligned}$$

Réciproquement :

Deux angles qui ont le même sinus sont soit égaux à $2k\pi$ près, soit supplémentaires à $2k\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$).

Principe d'équivalence

On en déduit le principe d'équivalence

$$\sin x = \sin a \Leftrightarrow x = a + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Exemple

Résoudre l'équation $\sin x = \dfrac{1}{2}$

On a

$$\begin{aligned}
\sin x = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \\
&\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\
&\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions sera dans ce cas

$$S = \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$\diamond$

Remarque

Il y a quelques cas particuliers où la forme générale des solutions peut se résuler en une seule famille :

- $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$
- $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$
- $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$

2.1.3 Angles antisupplémentaires

Deux angles antisupplémentaires ont des tangentes et cotangentes égales et des sinus et cosinus opposés

$$\begin{aligned}
&\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha, && \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha \\
&\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha, && \operatorname{cotg}(\pi + \alpha) = \operatorname{cotg} \alpha
\end{aligned}$$

Réciproquement :

Deux angles qui ont la même tangente (cotangente) sont soit égaux à $2k\pi$ près, soit antisupplémentaires à $2k\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$).

Principe d'équivalence

On en déduit le principe d'équivalence

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a \Leftrightarrow x = a + 2k\pi \text{ ou } x = \pi + a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

càd

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a \Leftrightarrow x = a + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Remarque

Une équation trigonométrique faisant intervenir des expressions $\operatorname{tg} x$ ou $\operatorname{cotg} x$ exige la présence de conditions d'existence puisque ces nombres trigonométriques ne sont pas définis pour tous les angles.
Ainsi, $\operatorname{tg} x$ existe ssi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $\operatorname{cotg} x$ existe ssi $x \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Exemple

Résoudre l'équation $\operatorname{tg} x = 1$.
CE : $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

On a

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} x = 1 &\Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{4} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions sera dans ce cas

$$S = \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$$

◇

2.1.4 Angles complémentaires

[1]

Deux angles complémentaires sont tels que le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre et la tangente de l'un est égale à la cotangente de l'autre.

$$\begin{array}{ll} \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha, & \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha \\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{cotg}\alpha, & \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{tg}\alpha \end{array}$$

2.2 Equations réductibles

Les équations exposées dans ce paragraphe se résolvent à l'aide des principes d'équivalence vu ci-dessus. Pour faciliter la rédaction, nous les assimilerons au type $\cos x = \cos a$, mais le même raisonnement peut être utilisé pour $\sin x = \sin a$ ou $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a$. Nous emploierons indifféremment ces différentes équations dans les exemples.

2.2.1 $\sin \alpha x = \sin a$

Exemple

Résoudre $\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\begin{aligned} \sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2} &\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } 3x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions sera dans ce cas

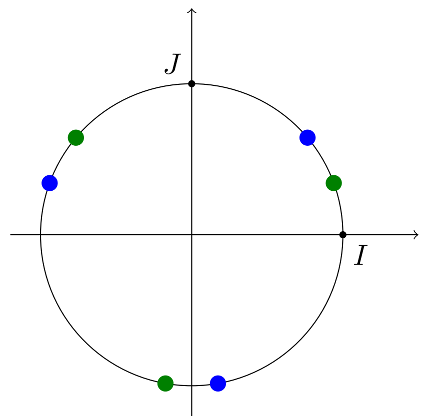
$$S = \left\{\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} : k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Les solutions fondamentales sont

1. Cette propriété est d'ailleurs à l'origine du mot "cosinus" pour désigner le sinus du complément d'un angle.

- $x_0 = \frac{\pi}{9}$, $x_1 = \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{9}$, $x_2 = \frac{\pi}{9} + \frac{4\pi}{3} = \frac{13\pi}{9}$,
- $x'_0 = \frac{2\pi}{9}$, $x'_1 = \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} = \frac{8\pi}{9}$, $x'_2 = \frac{2\pi}{9} + \frac{4\pi}{3} = \frac{14\pi}{9}$,

Elles peuvent être représentées sur le cercle trigonométrique de la façon suivante :



◇

2.2.2 $\sin \alpha x = \sin \beta x$

Exemple

Résoudre l'équation $\sin 2x = \sin 3x$.

$$\begin{aligned}\sin 2x = \sin 3x &\Leftrightarrow 2x = 3x + 2k\pi \text{ ou } 2x = \pi - 3x + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})\\ &\Leftrightarrow -x = 2k\pi \text{ ou } 5x = \pi + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})\\ &\Leftrightarrow x = 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5} (k \in \mathbb{Z})\end{aligned}$$

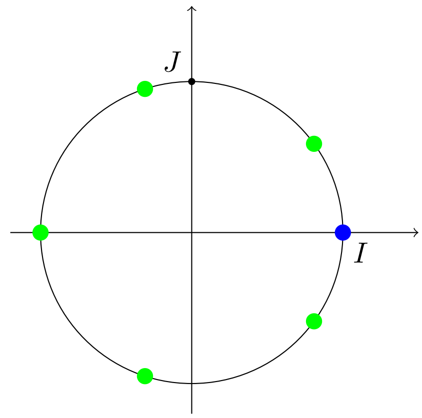
L'ensemble des solutions est

$$S = \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5} : k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Les solutions fondamentales sont

- $x_0 = 0$
- $x'_0 = \frac{\pi}{5}$, $x'_1 = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5} = \frac{3\pi}{5}$, $x'_2 = \frac{\pi}{5} + \frac{4\pi}{5} = \pi$,
  $x'_3 = \frac{\pi}{5} + \frac{6\pi}{5} = \frac{7\pi}{5}$; $x'_4 = \frac{\pi}{5} + \frac{8\pi}{5} = \frac{9\pi}{5}$

Elles peuvent être représentées sur le cercle trigonométrique de la façon suivante :



◇

2.2.3 $\sin \alpha x = \cos \beta x$

Exemple

Résoudre l'équation $\sin x + \cos 2x = 0$.

On se ramène à une équation ne comportant plus que des cosinus ou des sinus.

$$\begin{aligned}
\cos 2x = -\sin x &\Leftrightarrow \cos 2x = \sin(-x) \\
&\Leftrightarrow \cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right) \\
&\Leftrightarrow \cos 2x = \cos\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) \\
&\Leftrightarrow 2x = x + \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } 2x = -\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}) \\
&\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est

$$S = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right\}, k \in \mathbb{Z}$$

$\diamond$

2.2.4 $P(\cos \alpha x) = 0$

Si $P(x)$ est un polynôme, une équation du type $P(\cos x)$ se résoud en posant $y = \cos x$. Chaque solution y de l'équation $P(y) = 0$ telle que $|y| \leq 1$ donnera une (des) famille(s) de solutions.

Exemple

Résoudre l'équation $2\cos^3 x + \cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$.

On pose $y = \cos x$. L'équation devient

$$2y^3 + y^2 - 5y + 2 = 0 \Leftrightarrow (y-1)(2y-1)(y+2) = 0$$

On a donc

$$\cos x = 1 \text{ ou } \cos x = \frac{1}{2} \text{ ou } \cos x = -2$$

Il suffit de résoudre les deux premières équations, la troisième est impossible. L'ensemble des solutions est

$$S = \{2k\pi\} \cup \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right\}, k \in \mathbb{Z}$$

$\diamond$

Chapitre 3

Formules d'addition et de duplication

3.1 Formules d'addition

3.1.1 Cosinus et sinus d'une somme ou d'une différence

- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

3.1.2 Tangente d'une somme et d'une différence

Pour toutes les valeurs de a et b pour lesquelles les expressions ont un sens [a] :

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b} \text{ et } \operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}.$$

a. $a, b, a+b, a-b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ où k entier

3.2 Formules de duplication

Ces formules permettent d'exprimer le sinus, le cosinus et la tangente d'un angle et de son double.

- $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$,
- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$,
- Pour tout $a \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ et $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, $\operatorname{tg} 2a = \dfrac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$.

3.3 Formules de Carnot

Ces formules permettent de factoriser une expression trigonométrique.

$$1 + \cos 2a = 2 \cos^2 a,$$
$$1 - \cos 2a = 2 \sin^2 a.$$

Conséquence

Si on remplace a par $\frac{a}{2}$, on obtient les formules suivantes :

$$1 + \cos a = 2 \cos^2 \tfrac{a}{2}$$
$$1 - \cos a = 2 \sin^2 \tfrac{a}{2}$$

3.4 $\sin a$ et $\cos a$ en fonction de tg $\frac{a}{2}$

Pour tout $a \neq (2k+1)\pi$ où k est entier :

$$\cos a = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}},$$

$$\sin a = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}.$$

3.5 Exercices

1. On donne les expressions :

   $E_1 = \cos^2 x - 2\cos a \cos x \cos(a+x) + \cos^2(a+x)$

   $E_2 = \cos^2 x - 2\sin a \cos x \sin(a+x) + \sin^2(a+x)$

   (a) Démontrer que les expressions E_1 et E_2 ont une valeur indépendante de x.

   (b) Vérifier que $E_1 + E_2 = 1$. (ULg 07/87 - q2)

2. Si $\sin(a+b+c+d) = 0$, vérifier que $\sin(a+c)\cdot\sin(a+d) = \sin(b+c)\cdot\sin(b+d)$ (ULg 09/97 - q2)

3. Vérifier les identités suivantes :

   (a) $\sin 3a = 4\sin a \sin(60° - a)\sin(60° + a)$ (ULg 09/01 - q1)

   (b) $\operatorname{tg}(45° - \frac{a}{2}) = \dfrac{1-\sin a}{\cos a} = \dfrac{\cos a}{1+\sin a}$ (ULg 07/2001).

   (c) $\sin^2 x + \sin^2(x + \frac{2\pi}{3}) + \sin^2(x - \frac{2\pi}{3}) = \dfrac{3}{2}$.(ULg 07/03 - q1)

4. Résoudre et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique :

   (a) $\sin^3 x \cos x - \sin x \cos^3 x = \dfrac{\sqrt{2}}{8}$ (ULg 09/04 - q2)

   (b) $\operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x - 2\operatorname{tg} 2x - 4\operatorname{tg} 4x > 8\sqrt{3}$ (ULg 07/04 - q2)

   (c) $2\sin^2 3x + \sin^2 6x = 2$.(ULg 07/06)

   (d) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x = 0$ (ULg 09/2009)

   (e) $\left(\dfrac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right)^2 + \sin x = 0$ (ULg 07/06).

5. Si $\cos(a+b) = \cos a . \cos b$, montrer que $\sin^2(a+b) = (\sin a + \sin b)^2$.

   Préciser dans quelles conditions la réciproque est vraie. (ULg 07/78 - q1)

6. Soit l'expression $\mathrm{E} = \cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c - 2\cos a \cos b \cos c - 1$.

   (a) Montrer que si $c = a + b$, alors $\mathrm{E} = 0$.

   (b) La réciproque est-elle vraie ? Justifier. (ULg 07/86 - q2 et 07/96 - q2)

7. Démontrer que si a, b et c sont en progression arithmétique, alors on a

   $$\operatorname{tg} b = \frac{\sin a + \sin b + \sin c}{\cos a + \cos b + \cos c}.$$

   Pour quelles valeurs de la raison la propriété est-elle en défaut ?

   La réciproque est-elle vraie ? (ULg 09/83 - q2)

8. Démontrer que si dans un triangle, on a $\beta = 2\ \gamma$, alors $b^2 = c^2 + ac$.

   La réciproque est-elle vraie ? (Ulg 07/83 - q2)

9. Calculer l'expression $\sin^2(a+b)+p\sin(a+b)\cos(a+b)+q\cos^2(a+b)$ en fonction de p et q sachant que $\operatorname{tg} a$ et $\operatorname{tg} b$ sont les racines de l'équation du second degré $x^2+px+q=0$. (07/80- q1 et 07/86- q2)

10. On désire trouver analytiquement la valeur de $\sin\frac{\pi}{10}$ sous forme d'une expression contenant des radicaux.

    On procède comme suit :

    (a) En posant $\mathrm{A} = \frac{\pi}{10}$, montrer que $\cos 3A = \sin 2A$

    (b) Développer l'équation précédente en termes de $\cos A$ et $\sin A$

    (c) L'équation obtenue peut se ramener à une équation du second degré en $\sin A$. Résoudre cette équation et faire le bon choix entre les solutions possibles.

Chapitre 4

Formules de Simpson

4.1 Formules

Les formules de Simpson permettent de factoriser une somme ou une différence de deux sinus ou deux cosinus.

$$\begin{array}{ll}
\text{Différence de cosinus :} & \cos p - \cos q = -2\sin\dfrac{p+q}{2}\sin\dfrac{p-q}{2}, \\
\text{Somme de cosinus :} & \cos p + \cos q = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}, \\
\text{Somme de sinus :} & \sin p + \sin q = 2\sin\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}, \\
\text{Différence de sinus :} & \sin p - \sin q = 2\sin\dfrac{p-q}{2}\cos\dfrac{p+q}{2}.
\end{array}$$

4.2 Exercices

4.2.1 Identités

1. Vérifier l'identité suivante : $\dfrac{\sin 2x + \sin 2y}{\cos 2x + \cos 2y} = \operatorname{tg}(x+y)$ (ULg 07/04 - q1)
2. Démontrer :
   (a) $\sin a + \sin b + \sin c - \sin(a+b+c) = 4\sin\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{b+c}{2}\sin\dfrac{c+a}{2}$.
   (b) $\sin a + \sin b + \sin(a+b) = 4\sin\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a}{2}\cos\dfrac{b}{2}$
3. Si a et b sont les angles aigus d'un triangle rectangle, démontrer que :

$$\sin 2a + \sin 2b = 2\cos(a-b).$$

4. Démontrer que les expressions sont indépendantes de x :
   (a) $\sin(a+x)+\sin(a-x)-2\sin a\cos x$
   (b) $2\cos^2\dfrac{a+x}{2}-\cos(a+x)$
   (c) $1-\cos 2x+2(\sin^2 a\cos^2 x-\sin^2 x\cos^2 a)$
5. Identités conditionnelles : Si α,β et γ sont les angles d'un triangle, démontrer que
   (a) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$.
   (b) $\cos\alpha-\cos\beta+\cos\gamma+1=4\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$.
   (c) $\sin 2\alpha-\sin 2\beta+\sin 2\gamma=4\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma$.
   (d) $\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma+4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma+1=0$.
   (e) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=2$.
   (f) $\cos 4\alpha+\cos 4\beta+\cos 4\gamma+1=4\cos 2\alpha\cos 2\beta\cos 2\gamma$ (sept 99 - q2)
   (g) $\sin\alpha-\sin\beta+\sin\gamma=4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$(ULg 9/99)
   (h) $\dfrac{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}{\sin 2\alpha}=\dfrac{\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\alpha}{\sin 2\beta}=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\sin 2\gamma}$ (ULg 07/97 - q2)

4.2.2 Equations - Inéquations

1. Résoudre les équations et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique
   (a) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=\sqrt{2}(1+\cos x+\cos 2x)$ (ULg 07/08)
   (b) $\cos 2x+\cos 6x=1+\cos 8x$. (ULg 07/03)
   (c) $\sin 5x-\sin 3x=\cos 6x+\cos 2x$ (ULg 07/07)
2. Résoudre l'inéquation $\sin(x-\frac{\pi}{3})>\sin x$

Chapitre 5

Equations - Compléments

Nous évoquons dans ce chapitre quelques types particuliers d'équations trigonométriques. A chacun de ces types correspond une méthode qui fonctionne à chaque fois, mais souvent d'autres méthodes donnent le même résultat, parfois de façon au moins aussi efficaces.

5.1 Équation linéaire en $\sin x$ et $\cos x$

Il s'agit d'équation de la forme de

$$a \sin x + b \cos x = c \tag{5.1}$$

où a, b et c sont tous non nuls.

La méthode la plus efficace de résolution de (5.1) consiste à

- diviser les deux membres par a ou b (nous supposerons dans la suite qu'on a divisé par a)
- poser $\dfrac{b}{a} = \operatorname{tg} \phi$ de sorte que l'équation devient

$$\sin x + \operatorname{tg} \phi \cdot \cos x = \frac{c}{a} \Leftrightarrow \cos \phi \sin x + \sin \phi \cos x = \frac{c}{a} \cdot \cos \phi \Leftrightarrow \sin(\phi + x) = \frac{c}{a} \cdot \cos \phi$$

- Deux cas peuvent se présenter selon la valeur du deuxième membre :
  - Si $\dfrac{c}{a} \cos \phi < -1$ ou $\dfrac{c}{a} \cos \phi > 1$, l'équation est impossible.
  - Si $-1 \leq \dfrac{c}{a} \cos \phi \leq 1$, on pose $\dfrac{c}{a} \cos \phi = \sin \Phi$ de sorte que l'équation devient

$$\sin(\phi + x) = \sin \Phi$$

que l'on peut résoudre par les méthodes vues plus haut.

Exemple

Résoudre l'équation $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x = 1$

Divisons les deux membres par $\frac{1}{2}$. L'équation devient

$$\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = 2$$

On pose $\operatorname{tg}\phi = \sqrt{3}$ (ce est qui le cas lorsque $\phi = \frac{\pi}{3}$). L'équation devient

$$\operatorname{tg}\phi \sin 2x - \cos 2x = 2 \Leftrightarrow \sin\phi\sin 2x - \cos 2x\cos\phi = 2\cos\phi \Leftrightarrow \cos(\frac{\pi}{3} + 2x) = -1$$

qui se résoud facilement à l'aide des méthodes vues plus haut.

Deuxième méthode

Une autre méthode efficace de résolution de (5.1) consiste à exprimer les paramètres a et b sous une forme différente, ce qui permet de simplifier la forme de l'équation. On pose en effet

$$a = r\sin\theta \text{ et } b = r\cos\theta \tag{5.2}$$

où r est défini positif, $\theta \in [0, 2\pi[$.

a et b étant connus, il est possible de déterminer les valeurs correspondantes de r et θ.

Ainsi, r est obtenu en sommant les carrés des équations (5.2)

$$a^2 + b^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = r^2$$

d'où

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{5.3}$$

θ est alors obtenu à l'aide des relations (5.2), qui nous donnent

$$\cos\theta = \frac{b}{r} \text{ et } \sin\theta = \frac{a}{r} \tag{5.4}$$

Après avoir réalisé le changement de variable donné par (5.2), l'équation (5.1) devient alors

$$r\sin\theta\sin x + r\cos\theta\cos x = cr\cos(x-\theta) = c \Leftrightarrow \cos(x-\theta)\frac{c}{r}$$

qui se résoud facilement à l'aide des méthodes vues plus haut.

Remarque

L'équation (5.1) n'admet pas toujours de solution. Pour qu'il y en ait une, il faut que

$$\left|\frac{c}{r}\right| \leq 1 \Leftrightarrow \frac{c^2}{r^2} \leq 1$$

Se souvenant que $r^2 = a^2 + b^2$, il vient

$$\frac{c^2}{a^2+b^2} \leq 1 \Leftrightarrow c^2 \leq a^2 + b^2 \tag{5.5}$$

En résumé, pour résoudre une équation du type de (5.1), il faut

1. Vérifier la condition (5.5) afin de garantir l'existence de solutions.
2. Calculer r et θ via (5.3) et (5.4).
3. Effectuer le changement de variable (5.2).
4. Utiliser la formule d'addition adéquate et résoudre l'équation du premier degré en $\cos x$ obtenue.

5.2 Équations homogènes en $\sin x$ et $\cos x$

Une équation *homogène* en $\sin x$ et $\cos x$ est une équation pouvant s'écrire sous la forme $P(\cos x, \sin x) = 0$ où P est un polynôme dont les termes sont des produits de type $\sin^m x \cos^n x$ avec $m + n$ est constant pour chacun des termes du polynôme.

Exemples

Les équations

$$5\sin^2 x - 2\cos^2 x - 3\sin x \cos x = 0$$
$$2\cos^4 3x + \sin 3x \cos^3 3x - \sin^2 3x \cos^2 3x = 0$$

sont homogènes.

Dans le premier exemple, le degré de l'équation est de deux. Il est de quatre dans le second.

Afin de résoudre ces équations,

– on vérifie que P est factorisé (i.e. on ne peut mettre aucun facteur en évidence). Après factorisation éventuelle et application de la règle du produit nul, il reste une équation homogène (de degré $k \leq m + n$ inférieur) en $\sin x$ et $\cos x$ que l'on traite en suivant le deuxième point.

– on divise les deux membres de l'équation [1] par $\cos^k x$, dans le but de se ramener à une équation algébrique de degré $n+m$ en $\tan x$.

Exemple

Résoudre

$$5\sin^2 x - 2\cos^2 x - 3\sin x\cos x = 0$$

Cette équation est homogène de degré deux. Comme $\cos x = 0$ n'est pas solution de cette équation, on la divise par $\cos^2 x$.

$$\begin{aligned} 5\sin^2 x - 2\cos^2 x - 3\sin x\cos x = 0 &\Leftrightarrow 5\tan^2 x - 2 - 3\tan x = 0 \\ &\Leftrightarrow 5\tan^2 x - 3\tan x - 2 = 0 \end{aligned}$$

Et on obtient bien une équation du second ordre en la variable $\tan x$.

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \tan x = 1 \text{ ou } \tan x = -\tfrac{2}{5} \\ &\Leftrightarrow x = \tfrac{\pi}{4} + k\pi \text{ ou } x = -\arctan\tfrac{2}{5} + k\pi \end{aligned}$$

L'ensemble de solutions est

$$S = \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi\right\} \cup \left\{-\arctan\frac{2}{5} + k\pi\right\}, k \in \mathbb{Z}$$

$\diamond$

5.3 Équations symétriques en $\sin x$ et $\cos x$

Une équation *symétrique* en $\sin x$ et $\cos x$ si son écriture ne change pas si l'on remplace $\sin x$ par $\cos x$ et vice-versa.

Exemples

$\sin x + \cos x = \sin x\cos x$

$\sin^3 x + \cos^3 x = 1$

Ces équations se résolvent via le changement de variable

$$x = y + \frac{\pi}{4}$$

1. On peut faire cela car que $\cos x = 0$ n'est pas une solution de l'équation

On aura en effet

$$\sin x = \sin(y + \tfrac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos y + \sin y) \tag{5.6}$$

$$\cos x = \cos(y + \tfrac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos y - \sin y) \tag{5.7}$$

Comme l'équation est symétrique, des simplifications auront lieu lors de la substitution. Il faudra alors éventuellement utiliser la formule fondamentale pour se ramener à une équation algébrique en sinus ou en cosinus.

Exemple

Juillet 2010 - Question 2

Résoudre l'équation

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \sin x \cos x$$

Il s'agit bien d'une équation symétrique en sinus et cosinus [a]. On utilise les équations (5.6) et (5.7) pour évaluer les différents termes de l'équation.

$$\begin{aligned}
\sin^4 x &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos y + \sin y)\right)^4 \\
&= \frac{1}{4}(\sin^2 y + \cos^2 y + 2\sin y \cos y)^2 \\
&= \frac{1}{4}(1 + 2\sin y \cos y)^2 \\
&= \frac{1}{4}(1 + 4\sin y \cos y + 4\sin^2 y \cos^2 y)
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\cos^4 x &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos y - \sin y)\right)^4 \\
&= \frac{1}{4}(\sin^2 y + \cos^2 y - 2\sin y \cos y)^2 \\
&= \frac{1}{4}(1 - 2\sin y \cos y)^2 \\
&= \frac{1}{4}(1 - 4\sin y \cos y + 4\sin^2 y \cos^2 y)
\end{aligned}$$

a. Notons que l'on aurait également pu ramener cette équation à une équation homogène en sinus et cosinus en multipliant le membre de droite par $\cos^2 x + \sin^2 x$.
On se serait alors ramené à une équation algébrique du quatrième degré en $\tan x$, que l'on aurait résolue par groupement.

L'équation devient

$$\begin{aligned}
\sin^4 x + \cos^4 x = \sin x \cos x &\Leftrightarrow \tfrac{1}{2}(1 + 4\sin^2 y \cos^2 y) = \tfrac{1}{2}(\cos^2 y - \sin^2 y) \\
&\Leftrightarrow 1 + 4\sin^2 y \cos^2 y - \cos^2 y + \sin^2 y = 0
\end{aligned}$$

Reste alors à remplacer $\sin^2 y$ par $1 - \cos^2 y$ pour se ramener à une équation du second degré en $\cos^2 y$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 1 + 4(1 - \cos^2 y)\cos^2 y - \cos^2 y + 1 - \cos^2 y = 0 \\
&\Leftrightarrow -4\cos^4 y + 2\cos^2 y + 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow -2\cos^4 y + \cos^2 y + 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow \cos^2 y = -\tfrac{1}{2} \text{ ou } \cos^2 y = 1
\end{aligned}$$

L'équation de gauche est évidemment impossible, un carré étant toujours positif.

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \cos^2 y = 1 \\
&\Leftrightarrow y = k\pi.
\end{aligned}$$

Finalement, on repasse à la variable d'origine, se souvenant que $x = y + \frac{\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow x = \tfrac{\pi}{4} + k\pi$$

D'où

$$S = \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi\right\}, k \in \mathbb{Z}$$

◇

Chapitre 6

Inéquations

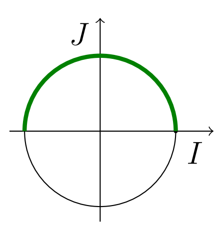
La résolution d'inéquations trigonométriques est moins méthodique que celle des équations.
Une bonne approche en général est de résoudre l'équation correspondante puis d'identifier les solutions sur le cercle trigonométrique.
Les solutions d'une inéquation trigonométriques sont généralement une union d'intervalles, dont les bornes sont les solutions de l'équation correspondantes.

6.1 Inéquations de base

6.1.1 $\sin x \geq 0$

On a

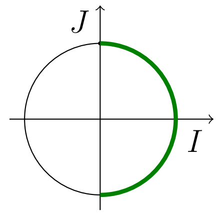
$$\sin x \geq 0 \Leftrightarrow 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi$$



6.1.2 $\cos x \geq 0$

On a

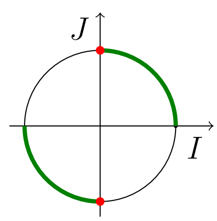
$$\cos x \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$



6.1.3 $\mathbf{tg}\, x \geq 0$

Vu les conditions d'existence ($x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$), on a On a

$$\operatorname{tg} x \geq 0 \Leftrightarrow k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi$$



6.2 Inéquations du premier degré

6.2.1 $\sin x \geq a$

Si $a < -1$, l'inéquation est toujours vérifiée. S $= \mathbb{R}$.

Si $a > 1$, l'inéquation n'est jamais vérifiée. S $= \emptyset$.

Si $a = 1$, l'inéquation devient $\sin x = 1$.

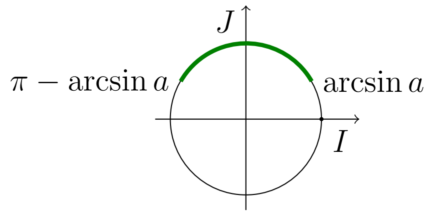
Si $a = -1$, l'inéquation devient $\sin x = -1$.

Si $-1 < a < 1$, alors on résout l'équation

$$\sin x = a \Leftrightarrow x = \arcsin a + k\pi \text{ ou } x = \pi - \arcsin a + k\pi.$$ [1]

Ces deux valeurs déterminent sur le cercle trigonométrique deux arcs de cercles : l'un contient les solutions, l'autre pas.

1. On a $\sin x = a \Leftrightarrow x = \arcsin x, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], a \in [-1, 1]$.
La fonction arcsin est définie et ses propriétés expliquées dans le fascicule de synthèse d'analyse.



Les solutions de l'inéquations sont

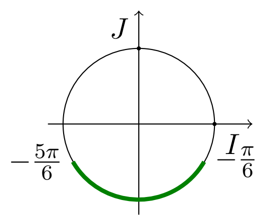
$$\arcsin a + 2k\pi \leq x \leq \pi - \arcsin a + 2k\pi$$

Exemple

Résoudre $\sin x \leq -\frac{1}{2}$.

On a

$$\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi.$$



Les solutions de l'inéquations sont

$$-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

Il faut être attentif à n'écrire que des inégalités qui ont du sens. Il ne suffit pas de renverser le sens des inégalités algébriques si l'inégalité trigonométrique change de sens.

Exemple

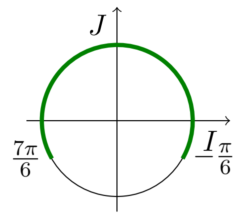
Résoudre $\sin x \geq -\frac{1}{2}$.

On ne peut pas écrire que les solutions sont

$$-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \geq x \geq -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

puisque cela n'est pas vrai, mais bien

$$\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi.$$



Les solutions de l'inéquations sont

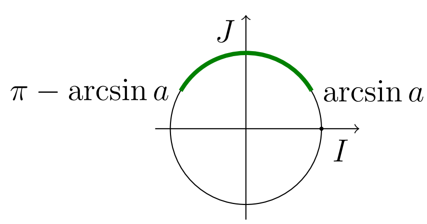
$$-\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$$

6.2.2 $\sin \alpha x \geq a$

Vu les considérations du paragraphe précédent, nous n'envisagerons que le cas $-1 < a < 1$. on résout l'équation

$$\sin \alpha x = a \Leftrightarrow \alpha x = \arcsin a + 2k\pi \text{ ou } \alpha x = \pi - \arcsin a + 2k\pi.$$

Ces deux valeurs déterminent sur le cercle trigonométrique deux arcs de cercles : l'un content les solutions, l'autre pas.



Si $\alpha > 0$, les solutions de l'inéquations sont

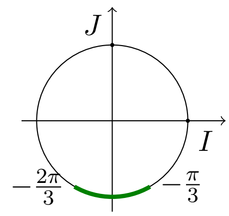
$$\frac{\arcsin a + 2k\pi}{\alpha} \leq x \leq \frac{\pi - \arcsin a + 2k\pi}{\alpha}$$

Exemple

Résoudre $\sin 2x \leq -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

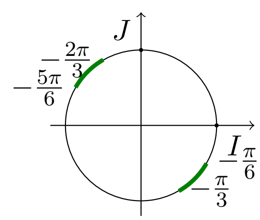
On a

$$\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } 2x = \pi - \frac{-\pi}{3} + 2k\pi.$$



D'où

$$\sin 2x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq 2x \leq \frac{-\pi}{3} + 2k\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{6} + k\pi$$



Les solutions de l'inéquations sont

$$-\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{3} + k\pi$$

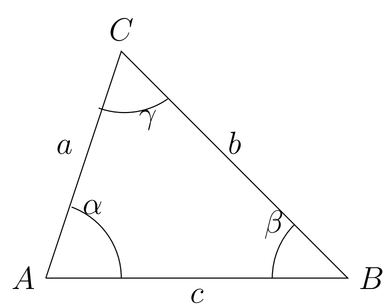
6.3 Autres inéquations

Il faut factoriser l'expression fournie en différents facteurs dont le signe peut être étudié, c'est à dire des équations du premier ou du deuxième degré. Reste alors, à l'aide du cercle trigonométrique, à trouver les angles qui vérifient ces conditions.

Chapitre 7

Résolutions de triangles

Dans chaque chapitre relatif aux triangles, nous appelons les sommets A, B et C, les amplitudes des angles correspondants α, β et γ et les longueurs des côtés opposés a, b et c.



Les relations que nous allons rappeler permettent de "résoudre" un triangle, càd de calculer toutes les longueurs des côtés et les amplitudes des angles à partir de données indépendantes.

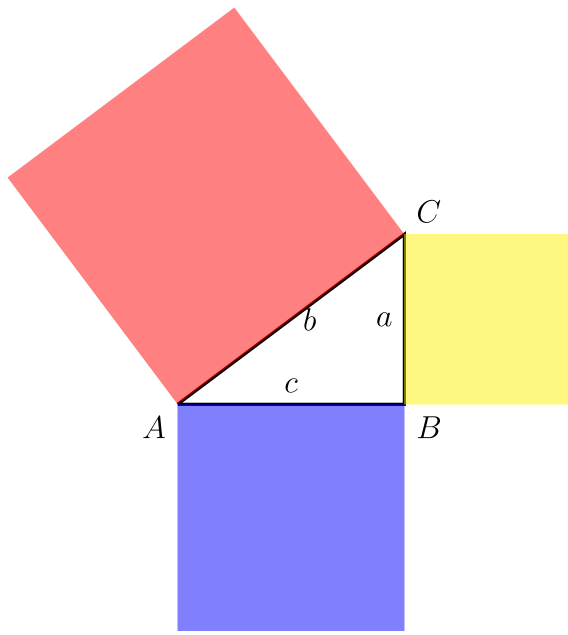
En général, dans ce type de problèmes, les amplitudes des angles sont exprimées en degrés. Il est évident qu'en plus des propriétés annoncées ci-dessous, il faut garder en mémoire la propriété

> La somme des angles d'un triangle (plan) vaut 180°

7.1 Triangle rectangle

7.1.1 Théorème de Pythagore

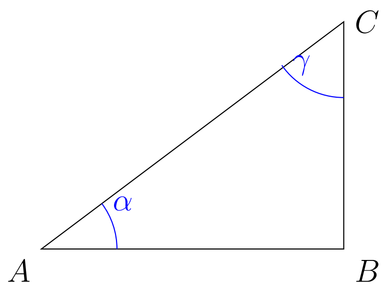
Dans un triangle rectangle, la carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.



7.1.2 Nombres trigonométriques

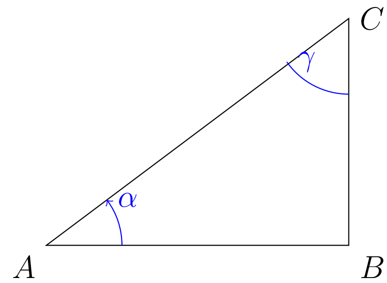
Dans un triangle rectangle,

- le *cosinus* d'un angle aigu est le quotient du côté adjacent par l'hypoténuse.



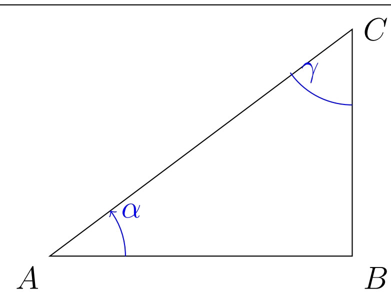
$$\cos\alpha = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{c}{b} \text{ et } \cos\gamma = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{a}{b}$$

- le *sinus* d'un angle aigu est le quotient du côté opposé par l'hypoténuse.



$$\sin\alpha = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{a}{b} \text{ et } \sin\gamma = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{c}{b}$$

- la *tangente* d'un angle aigu est le quotient du côté opposé par le côté adjacent.



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{a}{c} \text{ et } \operatorname{tg}\gamma = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{c}{a}$$

7.1.3 Exercices

1. Une échelle de 12 m est appuyée contre un mur vertical, son pied est à 3 m du mur. Quelle est l'inclinaison (angle de l'échelle avec l'horizontale) ?
2. Une rue a une pente régulière. On observe que pour un seuil de porte de 1,30 m, la différence de hauteur apparente est 9 cm. Quelle est l'inclinaison de la rue (angle avec l'horizontale) ?
3. Sur les plans d'un architecte, on voit qu'un bâtiment a un pignon en forme de triangle isocèle dont la base mesure 7 m et dont les pentes du toit sont de 40°

   (a) Quelle est la hauteur du pignon à partir de la base du toit ?

(b) A quelle distance de l'extrémité du toit peut-on construire un mur de 1,20 m de haut ?

(c) Quelle est la largeur de la pièce lorsque les 2 murs de 1,20 m sont construits ?

4. Un bateau est immobilisé le long d'un quai à l'aide de deux amarres fixées à l'arrière et à l'avant du bateau. L'autre extrémité de chaque amarre est attachée à une même bitte d'amarrage située à 10 m du bord du quai. Une amarre fait un angle de 5° avec la perpendiculaire au bord du quai et l'autre fait un angle de 74° avec cette perpendiculaire. Calculer la longueur du bateau.

5. A la suite d'un effondrement de terrain, la tour Eiffel $[AC]$ s'est affaissée latéralement. Un câble $[AD]$ de 650 m est fixé à son sommet pour la retenir, il est fixé au sol à 450 m du centre C du pied de la tour. Ce câble fait un angle de 25° avec le sol.

   (a) Quelle était la hauteur de la tour ?

   (b) Quelle est son inclinaison par rapport au sol ?

6. Un astronome a observé qu'un jour de l'année les rayons du soleil et ceux provenant de Proxima du Centaure forment un angle droit. Six mois plus tard, l'angle n'est plus que de 89°59'58". Sachant que la distance Terre-soleil est de 8 minutes et 20 secondes-lumière, quelle est la distance entre la Terre et l'étoile ? (une année-lumière = distance parcourue par la lumière en une année ; c = 300 000 km/s).

7. Un observateur est situé à une altitude de 1500 m (sommet d'une montagne). Il mesure un angle de 1°15' entre l'horizontale (perpendiculaire à la verticale du lieu) et l'horizon (droite passant par l'observateur qui est tangente à la surface de la Terre). Calculer le rayon terrestre.

7.2 Triangles quelconques

7.2.1 Formule des cosinus

Ces formules sont appelées "théorème de Pythagore généralisé" ou "formule d'Al-Kashi".

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

7.2.2 Formule des sinus

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

Remarque

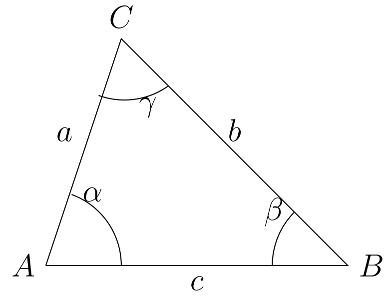
La rapport $\dfrac{\sin\alpha}{a}$ est égal à $\dfrac{1}{2R}$ où R est le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

7.2.3 Aire d'un triangle

Outre la fameuse propriété "l'aire d'un triangle est égale au demi produit de la base par la hauteur", il est bon de savoir

l'aire d'un triangle est égale au demi produit des longueurs de deux côtés par le sinus de l'angle qu'ils forment.

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$$



7.2.4 Exercices

1. Résoudre les triangles suivants.

   (a) $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 120^\circ$, $c = 1$

   (b) $a = 6$, $\beta = 75^\circ$, $\gamma = 64^\circ$

   (c) $b = 5$, $c = 12$, $\alpha = 43^\circ$

   (d) $b = 15$, $c = 6$, $\alpha = 100^\circ$

   (e) $b = 14$, $\alpha = 135{,}23^\circ$, $\gamma = 17{,}23^\circ$

   (f) $b = 3$, $c =2$, $B = 143{,}22^\circ$

   (g) $a = 10$, $c = 11$, $\alpha = 49{,}322^\circ$

   (h) $a = 5$, $b = 8$, $c = 10$

   (i) $b = 5$,$c = 12$, $a = 4^\circ$

2. Deux points A et B sont sur deux rives opposées d'un étang. Pour évaluer leur distance, on prend un point P quelconque (hors de l'étang). On obtient les mesures suivantes $|PA| = 70$ m et $|PB| = 100$ m. L'angle $\widehat{APB}$ a une amplitude de $75{,}607^\circ$. Calculer $|AB|$.

3. Noémie regarde un arbre de l'autre côté de la rivière. Quand elle est au bord de la rivière, elle le voit sous un angle de 65° et quand elle recule de 20 m (perpendiculairement à la rivière) sous un angle de 40° ; on suppose que ses yeux se trouvent sur la même horizontale que le pied de l'arbre. Déterminer la hauteur de l'arbre et la largeur de la rivière.

4. Soit $ABCD$ un rectangle inscrit dans un cercle de centre O et de rayon R. On désigne par $\hat{O}$ l'angle $\widehat{AOB}$.

(a) Calculer l'aire des triangles AOB et AOD en fonction de R et de l'angle $\hat{O}$.

(b) En déduire l'aire du rectangle.

(c) Le rayon du cercle étant fixé, pour quelle valeur de $\hat{O}$ l'aire du rectangle est-elle maximale ? Préciser alors le rectangle obtenu.

5. On considère le cube $ABCDEFGH$ dont l'arête a une longueur 1 et on désigne par O le milieu des grandes diagonales du cube.

   (a) Calculer les longueurs des côtés du triangle ACG.

   (b) Calculer les longueurs des côtés du triangle AOC.

   (c) Calculer l'aire du triangle AOC de deux manières différentes : en faisant intervenir d'une part l'angle $\widehat{AOC}$, noté α et d'autre part, la hauteur du triangle issue de O.

   (d) En déduire la valeur $\sin\alpha$. Calculer $\cos\alpha$ (sans calculatrice).

   (e) Calculer une valeur approchée de α

6. Un avion assure la liaison entre Bruxelles et Vancouver, les deux villes étant approximativement sur le 50e parallèle nord, Bruxelles à 4° de longitude est et Vancouver à 125° de longitude ouest.

   (a) Quelle est la longueur du trajet le long du 50e parallèle sachant que le rayon de la Terre est de 6400 km ?

   (b) Même question si le trajet se fait le long d'un grand cercle càd le long d'un cercle dont le centre est le centre de la Terre.

Chapitre 8

Identités

8.1 Définition

Une *identité* est une égalité qui est vraie pour une infinité de valeurs des grandeurs qui y apparaissent. Ainsi, la formule fondamentale

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

et la formule

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \forall x \in \mathbb{R} \backslash \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

sont des identités.
Chacune des formules figurant dans cette synthèse est une identité.

Il ne faut donc pas confondre "démontrer une identité" et "résoudre une équation". [1]

Démontrer une identité trigonométrique revient donc à prouver que deux expressions sont égales. Pour démontrer une identité, il est conseillé d'utiliser une des trois "méthodes" suivantes :

- transformer le 1$^{\text{er}}$ membre de façon à obtenir le 2$^{\text{e}}$
- transformer le 2$^{\text{e}}$ membre pour obtenir le 1$^{\text{er}}$.
- transformer le 1$^{\text{er}}$ membre en une nouvelle expression, puis transformer le 2$^{\text{e}}$ membre pour obtenir la même nouvelle expression.

1. Voir chapitre "Equations et inéquations" de la synthèse d'algèbre pour la résolution d'(in)équations et les annexes en fin de document pour les démonstrations d'égalité(s).

Exemple

Vérifier l'identité suivante [a]

$$\frac{\sin 2x + \sin 2y}{\cos 2x + \cos 2y} = \operatorname{tg}(x+y).$$

CE : $\cos 3x + \cos 2y \neq 0$ et $x + y \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$
$\Leftrightarrow \cos 2x \neq -\cos 2y$ et $x + y \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$
$\Leftrightarrow 2x \neq \pi - 2y + 2k\pi$ et $2x \neq \pi + 2y + 2k\pi$ et $x + y \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$
$\Leftrightarrow x - y \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ et $x + y \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$
On a

$$\begin{aligned}\frac{\sin 2x + \sin 2y}{\cos 2x + \cos 2y} &= \frac{2\sin(x+y)\cos(x-y)}{2\cos(x+y)\cos(x-y)} \\ &= \operatorname{tg}(x+y)\end{aligned}$$

La simplification par $\cos(x-y)$ étant autorisée vu les CE.

[a] Il peut être utile de vérifier les conditions d'existence, même si ce n'est pas demandé dans l'énoncé.

Un cas particulier d'identité est donnée par le type d'exercice où il faut démontrer qu'une expression est indépendante d'une (ou des) variables qui y apparaissent.

Exemple

Démontrer que l'expression

$$\sin x + \sin(x + \frac{2\pi}{3}) + \sin(x + \frac{2\pi}{3})$$

est indépendante de x.

8.2 Identités conditionnelles

Une *identité conditionnelle* est une identité qui n'est vraie que si la (les) variables qui y interviennent vérifie(nt) une condition. Le cas le plus fréquent est celui où l'identité fait intervenir les trois angles d'un triangle.

Exemple

Septembre 1999 - Question 2

Montrer que, dans un triangle, on a

$$\sin A - \sin B + \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

Hyp : $A + B + C = \pi$

Th : $\sin A - \sin B + \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$

Résolution

Deux raisons nous poussent à partir du membre de gauche pour se ramener à celui de droite. D'une part, il est souvent plus facile de transformer une somme en produit qu'un produit en somme. D'autre part, les formules de Simpson et de duplication sont plus facile à manipuler si l'on part de l'angle et que l'on va vers sa moitié, plutôt que dans le sens contraire.

Par hypothèse, $A = \pi - (B + C)$. D'où $\sin A = \sin(B + C)$.

D'où

$$\begin{aligned}
\sin A - \sin B + \sin C &= \sin(B + C) - 2 \cos \left(\frac{B + C}{2}\right) \sin \left(\frac{B - C}{2}\right) \\
&= 2 \cos \left(\frac{B + C}{2}\right) \left(\sin \left(\frac{B + C}{2}\right) - \sin \left(\frac{B - C}{2}\right)\right)
\end{aligned}$$

De nouveau, par hypothèse, $\pi - A = (B + C)$. D'où $\cos \left(\frac{B + C}{2}\right) = \sin \frac{A}{2}$.

On a donc

$$\begin{aligned}
\sin A - \sin B + \sin C &= 2 \sin \frac{A}{2} \cdot 2 \sin \left(\frac{\frac{B+C}{2} - \frac{B-C}{2}}{2}\right) \cos \left(\frac{\frac{B+C}{2} + \frac{B-C}{2}}{2}\right) \\
&= 4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}
\end{aligned}$$

$\diamond$

Mais il peut y avoir d'autres cas.

Exemple

Juillet 2005 - Question 4

Montrer que, si x et y vérifient

$$\tan^2 x = 2\tan^2 y + 1$$

alors on a l'égalité

$$\cos 2x + \sin^2 y = 0.$$

Hyp : $\tan^2 x = 2\tan^2 y + 1$

Th : $\cos 2x + \sin^2 y = 0$

Résolution : La premier membre de la thèse s'écrit successivement

$$\begin{aligned}
\cos 2x + \sin^2 y &= 2\cos^2 x - 1 + (1 - \cos^2 y) \\
&= 2\left(\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\, x}\right) - \cos^2 y \\
&= 2\left(\frac{1}{1+2\,\mathrm{tg}^2\, y + 1}\right) - \cos^2 y \text{ (par hypothèse)} \\
&= \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\, y} - \cos^2 y \\
&= 0
\end{aligned}$$

◇

8.3 Identités et réciproques

Il est parfois demandé de démontrer une identité (conditionnelle ou non), puis d'envisager la cas de la réciproque. [2]

Cela implique souvent de faire deux démonstrations : une pour la propriété et l'autre pour la réciproque.

Exemple

Juillet 79, question 1.

Si $\cos(a+b) = \cos a \cos b$, montrer que $\sin^2(a+b) = (\sin a + \sin b)^2$.

Préciser dans quelles conditions la réciproque est vraie.

2. Voir annexe sur la logique mathématique.

Démontrons la propriété énoncée.

Hyp : $\cos(a+b) = \cos a \cos b$
Th : $\sin^2(a+b) = (\sin a + \sin b)^2$

Résolution : comme on a toujours

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$

l'hypothèse est équivalente à

$$\sin a \sin b = 0$$

ou encore $\sin a = 0$ ou $\sin b = 0$. Or le premier membre de la thèse s'écrit

$$\sin^2(a+b) = (\sin a \cos b + \sin b \cos a)^2 = \sin^2 a \cos^2 b + \sin^2 b \cos^2 a$$

Si $\sin a = 0$, on a $\cos^2 a = 1$. Le premier membre de la thèse est donc égal à $\sin^2 b$ et il est égal au deuxième membre. Si $\sin b = 0$, on a $\cos^2 b = 1$. Le premier membre de la thèse est donc égal à $\sin^2 a$ et il est égal au deuxième membre.

Réciproquement

Hyp : $\sin^2(a+b) = (\sin a + \sin b)^2$
Th : $\cos(a+b) = \cos a \cos b$

Résolution : Le premier membre de l'hypothèse est égal à

$$\sin^2(a+b) = \sin^2 a \cos^2 b + \sin^2 b \cos^2 a + 2 \sin a \sin b \cos a \cos b$$

et le second

$$(\sin a + \sin b)^2 = \sin^2 a + 2 \sin a \sin b + \sin^2 b$$

de sorte que l'hypothèse est équivalente à

$$2 \sin a \sin b\,(1 - \cos(a-b)) = 0$$

La réciproque est donc vraie ssi $1 - \cos(a+b) \neq 0 \Leftrightarrow a + b \neq 2k\pi$

Cependant, il est parfois possible de démontrer la propriété et sa réciproque en une seule démonstration.

Exemple

Montrer que le triangle ABC est rectangle ssi $\sin 4a + \sin 4b + \sin 4c = 0$.

Hyp : $a + b + c = 180^\circ$, $0 < a < 180^\circ$, $0 < b < 180^\circ$, $0 < c < 180^\circ$

Th : ABC rectangle ssi $\sin 4a + \sin 4b + \sin 4c = 0$

Résolution : Vu l'hypothèse, $4a = 720^\circ - 4(b + c)$ et $\sin 4a = -\sin 4(b + c)$. Donc

$\sin 4a + \sin 4b + \sin 4c = 0$

$\Leftrightarrow -\sin 4(b + c) + \sin 4b + \sin 4c = 0$

$\Leftrightarrow -2\sin 2(b + c)\cos 2(b + c) + 2\sin 2(b + c)\cos 2(b - c) = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin 2(b + c)\,(\cos 2(b - c) - \cos 2(b + c)) = 0$

$\Leftrightarrow 4\sin 2(b + c)\sin 2b\sin 2c = 0$

Vu l'hypothèse, $2(b + c) = 360 - 2a$ et $\sin 2(b + c) = -\sin 2a$.

Donc $\sin 4a + \sin 4b + \sin 4c = 0$

$\Leftrightarrow \sin 2a = 0$ ou $\sin 2b = 0$ ou $\sin 2c = 0$

$\Leftrightarrow a = k\frac{\pi}{2}$ ou $b = k\frac{\pi}{2}$ ou $c = k\frac{\pi}{2}$

Vu les intervalles acceptables pour a,b et c, on obtient

$\sin 4a + \sin 4b + \sin 4c = 0 \Leftrightarrow a = \frac{\pi}{2}$ ou $b = \frac{\pi}{2}$ ou $c = \frac{\pi}{2}$

càd la thèse. $\diamond$

8.4 Identités contenant des fonctions réciproques

Certaines identités peuvent aussi faire intervenir des expressions arcsin, arctg, etc. Une méthode appropriée s'applique généralement

Exemple

Juillet 2005 - Question 3

Démontrer l'égalité

$$\operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg}\frac{1 - a}{1 + a} = \frac{\pi}{4}.$$

Methode 1

Posons $\alpha = \operatorname{arctg} a$ et $\beta = \operatorname{arctg} \frac{1-a}{1+a}$, $\alpha,\ \beta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

On a donc $\operatorname{tg}\alpha = a$ et $\operatorname{tg}\beta = \frac{1-a}{1+a}$.

Calculons

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} = \frac{a + \frac{1-a}{1+a}}{1 - a\frac{1-a}{1+a}} = 1$$

Par suite $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Etant donné que $\alpha,\ \beta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a $\alpha + \beta \in]-\pi, \pi[$.

Les seules valeurs admissibles $\alpha + \beta$ sont donc $\frac{\pi}{4}$ et $-\frac{3\pi}{4}$. En conclusion, $\operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg} \frac{1-a}{1+a} = \frac{\pi}{4}$ ou $\operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg} \frac{1-a}{1+a} = -\frac{3\pi}{4}$.

$\diamond$

Méthode 2

L'analyse est un outil efficace pour résoudre ce type de problème. La fonction

$$f(a) = \operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg} \frac{1-a}{1+a}$$

est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

De plus,

$$f'(a) = \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^2} \cdot \frac{-(1+a)-(1-a)}{(1+a)^2} = 0.$$

La fonction f est donc constante sur chacun des intervalles où elle est définie.

On peut déterminer sa valeur en donnant une valeur particulière à a.

Dans $]-\infty, -1[$, on peut prendre

$$\lim_{a\to-\infty} f(a) = \lim_{a\to-\infty} \operatorname{arctg} a + \lim_{a\to-\infty} \operatorname{arctg} \frac{1-a}{1+a} = -\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{3\pi}{4}.$$

Pour l'intervalle $]-1, +\infty[$, on prend $a = 0$ et on trouve

$$f(0) = \operatorname{arctg} 0 + \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

$\diamond$

Annexe A

Eléments de logique

A.1 Définitions

A.1.1 Assertions

Dans le cadre de la logique mathématique, on définit les notions d'assertion et de proposition. Toutefois, ce vocabulaire peut varier en fonction des sources. Nous adopterons les définitions suivantes :

- Une *assertion* est une phrase (mathématique) qui a une seule valeur de vérité : soit vraie (V), soit fausse (F). Cette phrase doit avoir un sens clair et non ambigu.
- Une *proposition* est une assertion vraie.

  Selon l'importance ou la place que l'on donne à une proposition au sein d'une théorie, elle porte le nom de
  - théorème : proposition importante,
  - corollaire : conséquence directe d'un théorème,
  - lemme : proposition nécessaire à la démonstration d'un théorème qui n'est utile que pour cette démonstration,
  - axiome ou postulat : assertion d'une théorie que l'on admet au départ comme vraie.
- Deux assertions P et Q sont *équivalentes* si elles ont les mêmes valeurs de vérité. On écrit $P \Leftrightarrow Q$.

A.1.2 Opérations sur les assertions

A partir d'une ou plusieurs assertions, il est possible de construire de nouvelles assertions en utilisant des opérateurs (non, et, ou, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$).
Dans ce paragraphe, on note les assertions $P, Q, R \cdots$. Dans un premier temps, on ne s'intéresse pas au contenu de ces assertions, ni à leur valeur de vérité, mais aux relations qui existent entre elles.

Négation d'une assertion

Définition

Si P est une assertion, la *négation* de P est une assertion qui est fausse si P est vraie et qui est vraie si P est fausse. Elle est notée *non* P ou $\neg P$.
La négation de P peut aussi être définie par la table de vérité suivante :

P	$non\ P$
V	F
F	V

Propriété

Une assertion et sa double négation ont les mêmes valeurs de vérité

$$P \Leftrightarrow non(nonP)$$

.

Exemple

1. L'assertion « $5 = 3 + 4$ » est fausse,
   sa négation « $non(5 = 3 + 4)$ » c'est-à-dire « $5 \neq 3 + 4$ » est vraie.
2. Pour un nombre naturel n, on considère l'assertion P : « n est impair ».
   La négation de P est $(non\ P)$ càd « n n'est pas impair » càd « n est pair ».
   La double négation $(non\ (non\ P))$ est « il n'est pas vrai que n n'est pas impair » càd « il n'est pas vrai que n est pair » càd « n est impair ».

Conjonction et disjonction

Définitions

1. Soient deux assertions P et Q. L'assertion « P et Q » est vraie si les assertions P et Q sont toutes les deux vraies et elle est fausse dans les autres cas.
   L'assertion P et Q peut aussi être définie par la table de vérité suivante :

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

   L'assertion P et Q est aussi écrite sous la forme
   $$\begin{cases} P \\ Q \end{cases}$$
   ou sous la forme $P \wedge Q$.
   On peut faire le parallélisme avec le « et » du français. Mais en logique mathématique, quand on envisage l'assertion P et Q, il n'y aucun lien d'antériorité ou de causalité entre les assertions P et Q.
2. Soient deux assertions P et Q. L'assertion « P ou Q » est vraie si au moins une des deux assertions est vraie et elle est fausse si les deux assertions sont fausses.
   L'assertion P ou Q peut aussi être définie par la table de vérité suivante :

P	Q	P ou Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ici aussi on peut voir le parallélisme avec le « ou » du français, le « ou » n'étant pas exclusif. On la note aussi parfois $P \vee Q$.

Propriétés

1. Les opérateurs « et » et « ou » sont commutatifs :
   $(P \text{ et } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ et } P)$
   $(P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ ou } P)$
2. Loi du tiers exclus : l'assertion P ou $(non\ P)$ est toujours vraie.

Principes de Morgan

La négation de $(P$ ou $Q)$ est l'assertion *non* P et *non* Q.
càd $non(P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow (non\ P \text{ et } non\ Q)$.

La négation de P et Q est l'assertion *non* P ou *non* Q.
càd $non(P \text{ et } Q) \Leftrightarrow non\ P \text{ ou } non\ Q$.

Exemple

Résoudre $x^2 = 1$.

$x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$.

On ne peut pas écrire

$$x^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

puique l'accolade signifie "et".

[1]

1. Souvent la notation $x = \pm 1$ est utilisée pour condenser $x = 1$ ou $x = -1$. Le signe « $\pm$ »se lit « "plus ou moins".

Exemple

Rechercher les conditions d'existence de $\dfrac{1}{x^2-1}$.

CE :

$$x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 1 \text{ et } x \neq -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

puisque l'accolade signifie "et".

[2]

A.2 Implication et équivalence

A.2.1 Définition

Soient deux assertions P et Q. L'assertion « P implique Q » est vraie sauf si l'assertion P est vraie et Q fausse. On la note $P \Rightarrow Q$.

P est appelée l'antécédent, Q est le conséquent.

Elle peut aussi être définie par la table de vérité suivante :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

L'assertion $P \Rightarrow Q$ est fausse uniquement si P est vraie et Q est fausse.

Même si cela semble contraire à notre intuition, l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie quand P est fausse.

Terminologie

L'implication $P \Rightarrow Q$ se lit aussi sous la forme :

– P implique Q ou P entraîne Q ;

– Si on a P, alors on a Q ;

2. Souvent la notation $x \neq \pm 1$ est utilisée pour condenser $x \neq 1$ et $x \neq -1$. Elle devrait être déconseillée puisque, au sens strict, elle remplace le "et" par "ou".

– Q découle de P ;
– Q est une condition nécessaire (CN en abrégé) pour avoir P
– P est une condition suffisante (CS en abrégé) pour avoir Q

Remarques

1. La vérité de l'implication $P \Rightarrow Q$ traduit autre chose que le fait de voir apparaître la vérité de Q comme conséquence de la vérité de P. En effet, d'une part, l'implication est aussi vraie si P est faux et d'autre part, si l'assertion $P \Rightarrow Q$ est vraie, on ne peut pas déduire que Q est vrai sans avoir vérifié que P est vrai. Par conséquent, dans une démonstration, le signe $\Rightarrow$ ne peut pas être utilisé à la place des mots ´ donc, d'où, par conséquent, par suite,... ˇ.

2. Pour démontrer que la propriété $P \Rightarrow Q$ est vraie, il suffit de supposer que P est vraie et démontrer que Q est vrai puisque l'implication est toujours vraie si P est fausse. L'assertion P supposée vraie au départ est encore appelée *hypothèse* ; l'assertion Q est appelée *thèse*.

3. Certains énoncés de théorèmes ne se présentent pas explicitement sous la forme « Si ..., alors ... », mais sont néanmoins des implications.

Propriétés

1. L'implication $P \Rightarrow Q$ a la même valeur de vérité que $(non\ P)$ ou Q.

2. La négation de $P \Rightarrow Q$ est l'assertion P et $(non\ Q)$.

3. L'implication $P \Rightarrow Q$ équivaut à l'implication $non\ Q \Rightarrow non\ P$, qui est appelée *contraposée* de $P \Rightarrow Q$.

4. L'implication est transitive : $((P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

A.2.2 Implication réciproque

La *réciproque* de l'implication $P \Rightarrow Q$ est la nouvelle implication $Q \Rightarrow P$.
Dans certains cas, une implication et sa réciproque peuvent être vraies simultanément, mais l'une peut être vraie sans que l'autre ne le soit.

Exemples

1. Ecrire la réciproque de l'implication $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$.
   Sont-elles vraies toutes les deux ?
2. Ecrire l'énoncé du théorème de Pythagore ainsi que sa réciproque.
   S'agit-il d'assertions vraies ?

A.2.3 Equivalence

Définition

Les assertions P et Q sont *équivalentes* si P et Q ont les mêmes valeurs de vérité.
Cette définition peut aussi se traduire par :
L'équivalence $P \Leftrightarrow Q$ est vraie si P et Q ont les mêmes valeurs de vérité et fausse dans les autres cas.

On peut alors y associer la table de vérité suivante :

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Terminologie

L'équivalence $P \Leftrightarrow Q$ se lit aussi
- les assertions P et Q sont équivalentes ;
- P équivaut à Q ;
- on a P si et seulement si on a Q que l'on note P ssi Q ;

– P est une condition nécessaire et suffisante (CNS en abrégé) pour avoir Q ;
– Pour avoir Q, il faut et il suffit d'avoir P ;
– P est un critère pour avoir Q.

Propriété

L'assertion $P \Leftrightarrow Q$ a la même valeur de vérité que $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$.

A.3 Quantificateurs

A.3.1 Définitions

On appelle *prédicat* une proposition contenant une ou plusieurs variables tel que si on remplace celles-ci par des éléments d'un ensemble, on obtient une assertion.

- Soit $P(x)$ une prédicat qui dépend d'une variable x.

  Le *domaine de définition* de $P(x)$ est l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $P(x)$ est une assertion.

  Le *domaine de validité* de l'assertion $P(x)$ est l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $P(x)$ est une assertion vraie (ou une proposition).
- L'assertion « il existe x appartenant à E tel qu'on a $P(x)$ » est vraie si l'assertion $P(x)$ est vraie pour au moins une valeur de x appartenant à E.

  Elle se note : $\exists x \in E : P(x)$.

  Le symbole $\exists$ est appelé quantificateur existentiel, il se lit « il existe ».

  Cette notation fut introduite par G. PEANO (Italie, 1858-1932) en 1898 dans l'un de ses « Formulaires ».

  Dans le cas ou on veut exprimer « il existe un seul x appartenant à E tel que $P(x)$ » est vraie, on écrit $\exists! x \in E : P(x)$.
- L'assertion « pour tout x appartenant à E, on a $P(x)$ »est vraie si l'assertion $P(x)$ est vraie quelles que soient les valeurs de x appartenant à E.

  Elle se note : $\forall x \in E : P(x)$. Le symbole $\forall$ est appelé quantificateur universel, il se lit « pour tout » ou encore « quel que soit ». Il s'agit d'un A renversé pour *All* càd *tout* en allemand et en anglais.

Cette notation aurait été introduite en 1934 par Gentzen(1909-1945) ; elle ne figurait pas dans les Formulaires de Peano.

A.3.2 Propriétés

- La négation de $\forall x \in E : P(x)$ est l'assertion $\exists x \in E : non\ P(x)$.
- La négation de $\exists x \in E : P(x)$ est l'assertion $\forall x \in E : non\ P(x)$.

A.3.3 Assertions avec plusieurs quantificateurs

Si une assertion dépend de plusieurs variables, on peut construire de nouvelles assertions comportant plusieurs quantificateurs.

Exemples

Indiquer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x + y = y + x$

   Cette assertion exprime la commutativité de l'addition dans $\mathbb{R}$.

2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y = 5$

3. $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} : x + y = 5$

4. $\exists n \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} : x + n = x = n + x$

   Cette assertion traduit l'existence d'un neutre n pour l'addition dans $\mathbb{R}$.

5. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists x' \in \mathbb{R} : x + x' = 0 = x' + x$

   Cette assertion traduit l'existence d'un opposé pour chaque réel.

Obtient-on une assertion équivalente si on permute les quantificateurs ?

Annexe B

Quelques types de démonstrations

À partir d'un certain nombre d'axiomes, on construit de nouvelles propositions qui constituent une théorie mathématique, celle des nombres entiers, des réels, des nombres complexes ou encore la géométrie, la théorie des probabilités, ...

Ces propositions ou théorèmes doivent être démontrés càd validés par un raisonnement qui respecte les règles de logique abordées dans l'annexe précédente. Une proposition déjà démontrée peut ensuite être elle-même utilisée dans d'autres démonstrations. L'ordre dans lequel on démontre les propriétés a donc beaucoup d'importance !

Dans ce chapitre, nous envisageons différents types de démonstrations.

B.1 Démonstration d'une égalité ou d'une inégalité

Pour démontrer l'égalité $A = B$, on peut utiliser une des 3 méthodes suivantes :

- on transforme l'écriture de A jusqu'à obtenir B : $A = A' = ... = B$;
- on transforme l'écriture de B jusqu'à obtenir A : $B = B' = ... = A$;
- on transforme l'écriture de A et indépendamment celle de B jusqu'à ce qu'on obtienne la même expression :
  $A = A' = ... = C$,
  $B = B' = ... = C$.

Lors des transformations, on peut alors utiliser une égalité déjà démontrée.

On ne peut pas traiter une égalité à démontrer comme une équation que l'on veut résoudre.

Exemple : Démontrer

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Hyp : $a, b \in \mathbb{R}$

Th : $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Dém :

$$\begin{aligned}
(a+b)^3 &= (a+b)^2 \cdot (a+b) \\
&= (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) \\
&= (a^3 + 2a^2b + ab^2) + (a^2b + 2ab^2 + b^3) \\
&= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3
\end{aligned}$$

On procède de façon analogue pour démontrer une inégalité.

B.2 Démonstration d'une implication

Une proposition peut souvent se présenter sous la forme d'une implication.

B.2.1 Raisonnement déductif

Considérons l'implication $P \Rightarrow Q$.

Elle est toujours vraie si P est faux ! Il suffit donc de supposer que P est vrai et de prouver que Q est vrai.

P constitue les hypothèses et Q la thèse.

Lors du raisonnement, on utilise des mots ou des locutions tels que *donc, dès lors, d'où, par conséquent, on déduit que*,... On justifie les déductions en citant les propositions appliquées en écrivant les « mots liens » : *car, parce que, vu que, puisque, comme, or*, ... Une flèche $\Rightarrow$ n'a pas sa place dans une démonstration car elle traduit une implication qui ne peut pas nous permettre de déduire des éléments supplémentaires.

Exemple

Démontrer « Si n est un entier pair, alors n^2 est un entier pair. »

Cette proposition se traduit sous la forme d'une implication :

$$n \text{ est pair} \Rightarrow n^2 \text{ est pair.}$$

Hyp : n est pair Th : n^2 est pair

Dém : Comme n est pair, il s'écrit $n = 2p$ où p est un entier.

On obtient donc $n^2 = 4p^2 = 2(2p^2)$. Dès lors n^2 est pair puisque $2p^2$ est entier.

B.2.2 Démonstration par contraposition

Démontrer l'implication « $P \Rightarrow Q$ » revient à démontrer sa contraposée, soit *non* $Q \Rightarrow$ *non* P.

Exemple

Démontrer « Si n^2 est pair, alors n est pair. »

Cette assertion est équivalente à sa contraposée :

« Si n n'est pas pair, alors n^2 n'est pas pair »

qui peut aussi s'énoncer :

« Si n est impair, alors n^2 est impair ».

Hyp : n est impair Th : n^2 est impair

Dém : Comme n est impair, il s'écrit $n = 2k + 1$ où k est un entier.

On obtient donc

$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2p + 1$,

où $p = 2k^2 + 2k$ est un entier. Par conséquent, n^2 est impair.

B.2.3 Démonstration d'une équivalence

Pour démontrer l'équivalence $P \Leftrightarrow Q$, on peut procéder de deux manières :

– Première méthode : on démontre les deux implications $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$.

Exemple

Pour démontrer « n est pair $\Leftrightarrow n^2$ est pair », on démontre les deux implications réciproques l'une de l'autre :

1. n est pair $\Rightarrow n^2$ est pair : voir ci-dessus (B.2.1)
2. n^2 est pair $\Rightarrow n$ est pair : voir ci-dessus (B.2.2)

– Deuxième méthode : on traite des équivalences successives.

Exemple

Pour tous réels x et y : $x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$.

Hyp : $x, y \in \mathbb{R}$ Th : $x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$.

Dém : On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x^2 = y^2 &\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-y)(x+y) = 0 \\ &\Leftrightarrow x - y = 0 \text{ ou } x + y = 0 \\ &\Leftrightarrow x = y \text{ ou } x = -y \end{aligned}$$

on peut donc conclure que $x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$.

B.2.4 Démonstration par l'absurde

Pour démontrer l'implication $P \Rightarrow Q$ par l'absurde, on considère P comme hypothèse et Q comme thèse.

Le raisonnement s'appuye sur la tautologie [1]

$$P \text{ et } (\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P) \Rightarrow Q.$$

La méthode nous amène donc à supposer ensuite que la thèse est fausse càd que *non* Q est vrai et on cherche à en déduire un résultat qui contredit une hypothèse ou une propriété déjà démontrée (non $Q \Rightarrow$ non P). Vu la tautologie, cela signifie que la supposition Q est vrai.

Exemple

Le nombre réel $\sqrt{2}$ est irrationnel.

1. En calcul propositionnel, on appelle tautologie (du calcul propositionnel) une proposition (ou énoncé) toujours vraie.

Hyp : - Th : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Dém : Procédons par l'absurde et supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel.

Il existe alors deux nombres naturels premiers entre eux p et q tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.

En effet, on peut supposer sans restriction que la fraction est simplifiée car si ce n'est pas le cas, on la simplifie au maximum avant d'entreprendre le raisonnement.

On a donc $p = \sqrt{2}\, q$ et $p^2 = 2q^2$, ce qui implique que p^2 est pair et p aussi puisqu'on a démontré l'implication « p^2 est pair $\Rightarrow p$ est pair ».

Par conséquent, il existe un naturel k tel que $p = 2k$, d'où $p^2 = 4k^2$. On peut donc déduire que $q^2 = 2k^2$ est pair et que q est également pair.

Il en résulte que les deux nombres p et q sont tous les deux divisibles par 2, ce qui contredit le fait que la fraction $\frac{p}{q}$ est simplifiée.

Il est donc absurde de supposer $\sqrt{2}$ est rationnel.

B.2.5 Notion de contre-exemple

Pour montrer qu'une assertion n'est pas vraie, il suffit de trouver un cas où elle est fausse, on dit alors que ce cas est un contre-exemple.

Exemple

Montrer que l'assertion suivante est fausse :

« Le carré d'un nombre réel est supérieur ou égal à ce réel ».

Dém : Il existe beaucoup de nombres réels inférieurs ou égaux à leur carré. Par exemple, 2 puisque $2^2 = 4 > 2$.

Toutefois, l'assertion n'est pas toujours vraie ; en effet, on a $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$.

Ceci prouve que l'assertion n'est pas vraie pour tous les réels.

B.2.6 Thèse équivalente

Pour démontrer l'implication $P \Rightarrow Q$, il est parfois commode de remplacer la thèse Q par une assertion équivalente.

Exemple

Étant donnés trois nombres réels positifs x, y et z, si $x \leq y+z$, alors $\frac{x}{1+2x} \leq \frac{y}{1+2y} + \frac{z}{1+2z}$.

Hyp : $x, y, z \geq 0, x \leq y+z$
Th : $\frac{x}{1+2x} \leq \frac{y}{1+2y} + \frac{z}{1+2z}$.
Dém : Transformons l'inégalité de la thèse en :

$$x(1+2y)(1+2z) \leq y(1+2x)(1+2z) + z(1+2x)(1+2y)$$

qui est une inégalité équivalente à la thèse car on a multiplié les deux membres de l'inégalité par $(1+2x)(1+2y)(1+2z) > 0$ vu que x, y et z sont positifs.
En développant les deux membres de cette inégalité et en simplifiant, on obtient une nouvelle inégalité qui est aussi équivalente à la thèse :

$$x \leq y + z + 4yz(1+x).$$

Il suffit alors de démontrer cette inégalité à l'aide des hypothèses.
On sait que $x \leq y+z$ entraîne $x \leq y+z+4yz(1+x)$ puisque le terme $4yz(1+x)$ est positif.

B.2.7 Démonstration par récurrence

Ce type de démonstrations est longuement évoqué dans la synthèse d'algèbre.

Annexe C

Exercices résolus

Exemple 1 *Septembre 2000 - Question 2*

Résoudre l'équation

$$2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x = 3 \tag{C.1}$$

On remarque que l'utilisation de la formule de Carnot

$$2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$$

Transforme l'équation en une l'équation linéaire en $\sin 2x$ *et* $\cos 2x$

$$\begin{aligned} 1 - \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x &= 3 \\ \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x &= 2 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x &= 1 \end{aligned}$$

Cette équation admet des solutions, car la condition (5.5) *est respectée. On résout cette équation par la méthode citée précédemment. On commence par rechercher* r *et* θ *tels que*

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{2} &= r\sin\theta \\ -\frac{1}{2} &= r\cos\theta \end{aligned}$$

r *est donné par l'équation* (5.3)

$$r = \sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (-\frac{1}{2})^2} = \sqrt{1} = 1$$

θ par l'équation (5.4)

$$\tan\theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$

$$\theta = -\frac{\pi}{3} \quad ou \quad \theta = \frac{2\pi}{3}$$

On sait que le sinus de θ doit être positif. La valeur correcte de θ est $\frac{2\pi}{3}$.

L'équation (C.1) *s'écrit donc*

$$\begin{aligned}
r\sin\theta\sin 2x + r\cos\theta\cos 2x &= 1\\
\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\sin 2x + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos 2x &= 1\\
\cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) &= 1\\
2x - \frac{2\pi}{3} &= 2k\pi\\
2x &= \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\\
x &= \frac{\pi}{3} + k\pi
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions sera

$$S = \left\{\frac{\pi}{3} + k\pi\right\}, k \in \mathbb{Z}$$

$\diamond$

Exemple 2 *Septembre 2005 - Question 2*

Résoudre l'équation

$$\tan^3 x - 3\tan^2 x - 3\tan x + 1 = 0 \tag{C.2}$$

Conditions d'existence.

L'expression manipulée ne comporte ni fractions, ni racines. On manipule par contre les fonctions tangentes. Il faut donc vérifier que $\tan x$ *soit bien un nombre fini. Pour cela, il faut que*

$$\begin{aligned} \cos x &\neq 0 \\ x &\neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{aligned} \tag{C.3}$$

Manipuler l'équation (C.2) *n'a donc que sens que si* (C.3) *est vérifié.*

Résolution

Une fois (C.3) *précisé, on peut alors résoudre* (C.2) *en remarquant qu'il s'agit d'une équation algébrique du troisième degré en* $\tan x$*. En procédant par groupement, et se souvenant que* $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$*, on factorise cette équation*

$$\begin{aligned} \tan^3 x - 3\tan^2 x - 3\tan x + 1 &= 0 \\ (\tan^3 x + 1^3) + (-3\tan^2 x - 3\tan x) &= 0 \\ (\tan x + 1)(\tan^2 x - \tan x + 1) - 3\tan x(\tan x + 1) &= 0 \\ (\tan x + 1)(\tan^2 x - \tan x + 1 - 3\tan x) &= 0 \\ (\tan x + 1)(\tan^2 x - 4\tan x + 1) &= 0 \end{aligned}$$

Résoudre l'équation (C.2) *revient à résoudre les deux équations de base*

$$(\tan x + 1) = 0 \quad \textit{ou} \quad (\tan^2 x - 4\tan x + 1) = 0$$

Résolvons tout d'abord l'équation de gauche

$$\begin{aligned} (\tan x + 1) &= 0 \\ \tan x &= -1 \\ x &= -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{aligned} \tag{C.4}$$

Résolvons ensuite l'équation de droite

$$\tan^2 x - 4\tan x + 1 = 0$$

$$\begin{aligned} \tan x = 2+\sqrt{3} \quad &\textit{ou} \quad \tan x = 2-\sqrt{3} \\ x = \arctan(2+\sqrt{3}) + k\pi \quad &\textit{ou} \quad x = \arctan(2-\sqrt{3}) + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \quad &\textit{ou} \quad x = \frac{\pi}{12} + k\pi \qquad \text{(C.5)} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions sera donc l'union de (C.4) *et de* (C.5) *auquel on on retire* (C.3), *c'est à dire*

$$S = \left\{ \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} \right\}, k \in \mathbb{Z}$$

$\diamond$

Exemple 3 *Septembre 2002 - Question 2*

Résoudre l'équation

$$\frac{\cot x - \cos x}{\cot x + \cos x} = 2(1 - \sin x) \tag{C.6}$$

Conditions d'existence

D'une part, la cotangente doit être définie. Il faut donc que

$$\begin{aligned} \sin x &\neq 0 \\ x &\neq k\pi \end{aligned}$$

D'autre part, le dénominateur doit être non nul.

$$\begin{aligned} \cot x + \cos x &\neq 0 \\ \frac{\cos x}{\sin x} + \cos x &\neq 0 \\ \cos x \left(\frac{1 + \sin x}{\sin x} \right) &\neq 0 \end{aligned}$$

Comme on a déjà posé que $\sin x \neq 0$*, on peut multiplier les deux membres par ce terme et simplifier, afin d'obtenir*

$$\cos x(1 + \sin x) \neq 0 \tag{C.7}$$

Ceci n'est légal que parce qu'on est certain que $\sin x \neq 0$*. Dans le cas contraire, on ne peut éliminer le dénominateur.*

L'équation (C.7) *se réduit aux deux équations de base*

$$\begin{gathered} \cos x \neq 0 \quad \textit{et} \quad \sin x \neq -1 \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \textit{et} \quad x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{gathered}$$

Au total, les conditions d'existence seront

$$x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \tag{C.8}$$

Résolution

Comme souvent dans le cas d'équations faisant intervenir des fonctions tangente, cotangente, sécante ou cosécante ainsi que des sinus ou cosinus, on réécrit l'ensemble des fonctions au *moyen de* sin *et* cos *seulement.*

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{\cos x}{\sin x} - \cos x}{\frac{\cos x}{\sin x} + \cos x} &= 2(1-\sin x) \\
\frac{\cos x}{\cos x}\left(\frac{\frac{1-\sin x}{\sin x}}{\frac{1+\sin x}{\sin x}}\right) &= 2(1-\sin x)
\end{aligned}$$

On voudrait pouvoir simplifier et écrire que cette équation est équivalente à

$$\frac{1-\sin x}{1+\sin x} = 2(1-\sin x)$$

Ceci n'est vrai que si $\cos x \neq 0$ *et* $\sin x \neq 0$. *On vérifie donc que les conditions d'existence permettent cette simplification. Au vu de* (C.8), *c'est heureusement le cas, et l'équation se réduit bien à*

$$\frac{1-\sin x}{1+\sin x} = 2(1-\sin x)$$

On poursuit la résolution par une mise en évidence du facteur commun, puis on met les deux termes au même dénominateur[1]

$$\begin{aligned}
(1-\sin x)\left(\frac{1}{1+\sin x} - 2\right) &= 0 \\
(1-\sin x)\left(\frac{-1-2\sin x}{1+\sin x}\right) &= 0
\end{aligned}$$

Au vu des conditions d'existence, $1+\sin x \neq 0$. *L'équation se réécrit donc*

$$(1-\sin x)(-1-2\sin x) = 0$$

$$\begin{gathered}
1-\sin x = 0 \quad \textit{ou} \quad -1-2\sin x = 0 \\
\sin x = 1 \quad \textit{ou} \quad \sin x = -\frac{1}{2}
\end{gathered}$$

1. Au vu des conditions d'existence, on pourrait simplifier les deux membres par $1-\sin x$. Ceci n'est valide que parce que les conditions d'existence nous affirment que le facteur $1-\sin x$ est différent de zéro. En règle générale, simplifier les deux membres d'une équation par un facteur qui contient l'inconnue revient à négliger des solutions. Par exemple, simplifier l'équation $2\sin x = \sin x$ par $\sin x$ mène à l'égalité absurde $2 = 1$. La démarche correcte est de mettre $\sin x$ en évidence, ce qui conduit à l'équation $\sin x(2-1) = 0$, ayant pour solutions $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

La solution $\sin x = 1$ *est à rejeter car elle est incompatible avec les conditions d'existence. Restent donc les solutions*

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad ou \quad x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$$

qui, elles, sont bien compatibles. L'ensemble des solutions est donc

$$S = \left\{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right\} \cup \left\{\frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right\}, k \in \mathbb{Z}$$

◇

Exemple 4 *Juillet 07 - Question 2*

Résoudre l'équation

$$\cos^6 x + \sin^6 x = \frac{7}{16} \tag{C.9}$$

Le membre de gauche est bien homogène de degré 6*, tandis que celui de droite est de degré nul. On multiplie donc ce dernier par* $(\cos^2 x + \sin^2 x)^3$*, ce qui donne*

$$\begin{aligned}
\cos^6 x + \sin^6 x &= \frac{7}{16}(\cos^2 x + \sin^2 x)^3 \\
\cos^6 x + \sin^6 x &= \frac{7}{16}(\cos^6 x + 3\cos^4 x \sin^2 x + 3\cos^2 x \sin^4 x + \sin^6 x) \\
0 &= 3\cos^6 x - 7\cos^4 x \sin^2 x - 7\cos^2 x \sin^4 x + 3\sin^6 x
\end{aligned}$$

ce qui est bien une équation homogène en sinus et cosinus de degré 6*. Comme* $\cos x = 0$ *n'est pas solution, on divise cette équation par* $\cos^6 x$*, ce qui nous donne*

$$3\tan^6 x - 7\tan^4 x - 7\tan^2 x + 3 = 0$$

qui est une équation algébrique du troisième degré en $\tan^2 x$*. On pose donc* $\tan^2 x = y$ *pour se ramener à l'équation*

$$3y^3 - 7y^2 - 7y + 3 = 0$$

Par inspection, on remarque que $y = -1$ *est solution. On factorise donc cette équation en mettant le facteur* $y + 1$ *en évidence*

$$(y+1)(3y^2 - 10y + 3) = 0$$

On commence par résoudre l'équation $y + 1 = 0$*. Sachant que* $y = \tan^2 x$*, cela donne*

$$\tan^2 x = -1$$

ce qui est impossible. La première équation n'admet pas de solution.
On résout alors l'équation $3y^2 - 10y + 3 = 0$*. Ses solutions sont*

$$\begin{aligned}
y = 3 \quad &ou \quad y = \frac{1}{3} \\
\tan^2 x = 3 \quad &ou \quad \tan^2 x = \frac{1}{3} \\
\tan x = \pm\sqrt{3} \quad &ou \quad \tan x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \\
x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi \quad &ou \quad \pm\frac{\pi}{6} + k\pi
\end{aligned}$$

Ce qui donne pour ensemble de solutions

$$S = \left\{\pm\frac{\pi}{3} + k\pi\right\} \cup \left\{\pm\frac{\pi}{6} + k\pi\right\}, k \in \mathbb{Z}$$

◇

Exemple 5 *Juillet 2010 - Question 2*

Résoudre l'équation

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \sin x \cos x \tag{C.10}$$

Il s'agit bien d'une équation symétrique en sinus et cosinus[2]*. On utilise les équations* (5.6) *et* (5.7) *pour évaluer les différents termes de l'équation* (C.10)

$$\begin{aligned} \sin^4 x = & \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos y + \sin y)\right)^4 \\ = & \frac{1}{4}(\sin^2 y + \cos^2 y + 2\sin y \cos y)^2 \\ = & \frac{1}{4}(1 + 2\sin y \cos y)^2 \\ = & \frac{1}{4}(1 + 4\sin y \cos y + 4\sin^2 y \cos^2 y) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \cos^4 x = & \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos y - \sin y)\right)^4 \\ = & \frac{1}{4}(\sin^2 y + \cos^2 y - 2\sin y \cos y)^2 \\ = & \frac{1}{4}(1 - 2\sin y \cos y)^2 \\ = & \frac{1}{4}(1 - 4\sin y \cos y + 4\sin^2 y \cos^2 y) \end{aligned}$$

L'équation (C.10) *devient*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(1 + 4\sin^2 y \cos^2 y) &= \frac{1}{2}(\cos^2 y - \sin^2 y) \\ 1 + 4\sin^2 y \cos^2 y - \cos^2 y + \sin^2 y &= 0 \end{aligned}$$

Reste alors à remplacer $\sin^2 y$ *par* $1 - \cos^2 y$ *pour se ramener à une équation du second degré en* $\cos^2 y$

$$\begin{aligned} 1 + 4(1 - \cos^2 y)\cos^2 y - \cos^2 y + 1 - \cos^2 y &= 0 \\ -4\cos^4 y + 2\cos^2 y + 2 &= 0 \\ -2\cos^4 y + \cos^2 y + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Cette équation nous fournit deux valeurs de $\cos^2 y$

$$\cos^2 y = -\frac{1}{2} \quad ou \quad \cos^2 y = 1$$

L'équation de gauche est évidemment à rejeter, un carré étant toujours positif. Reste à résoudre l'équation de droite.

$$\begin{aligned} \cos^2 y &= 1 \\ \cos y &= \pm 1 \\ y &= k\pi \end{aligned}$$

2. Notons que l'on aurait également pu ramener cette équation à une équation homogène en sinus et cosinus en multipliant le membre de droite par $\cos^2 x + \sin^2 x$ On se serait alors ramené à une équation algébrique du quatrième degré en $\tan x$, que l'on aurait résolue par groupement.

Finalement, on repasse à la variable d'origine, se souvenant que $x = y + \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned} x - \frac{\pi}{4} &= k\pi \\ x &= \frac{\pi}{4} + k\pi \end{aligned}$$

Les solutions seront au final

$$S = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \right\}, k \in \mathbb{Z}$$

$\diamond$

Exemple 6 *Septembre 2001 - Question 2*

Résoudre l'équation[3]

$$\tan x + \cot x + \sec x + \csc x = -2$$

Conditions d'existence

Il faut que les fonctions utilisées soient définies, c'est-à-dire que

$$\cos x \neq 0 \quad et \quad \sin x \neq 0$$

$$x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Résolution

Travailler avec des sécantes ou cosécantes est rarement conseillé, car peu de formules concernent ces fonctions. On réécrit l'équation en terme de sinus et de cosinus

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} &= -2 \\ \frac{1 + \sin x}{\cos x} + \frac{1 + \cos x}{\sin x} &= -2 \end{aligned}$$

Et on remarque que cette équation est symétrique en sinus et cosinus. Il faut toutefois mettre les différents termes au même dénominateur avant d'effectuer la substitution, car on ne désire pas conserver de fraction.

$$\begin{aligned} \frac{\sin x + \sin^2 x + \cos x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} &= \frac{-2 \sin x \cos x}{\sin x \cos x} \\ \frac{1 + \sin x + \cos x}{\sin x \cos x} &= \frac{-2 \sin x \cos x}{\sin x \cos x} \end{aligned}$$

Les conditions d'existence nous garantissent que le dénominateur est non nul. L'équation peut donc être écrite

$$1 + \sin x + \cos x = -2 \sin x \cos x$$

3. Les fonctions sécante et cosécante, qui seront notées dans ce document sec et csc, représentent l'inverse des fonctions cosinus et sinus. On a donc les relations

$$\begin{aligned} \sec x &= \frac{1}{\cos x} \\ \csc x &= \frac{1}{\sin x} \end{aligned}$$

On remplace alors $\sin x$ *et* $\cos x$ *en utilisant les formules* (5.6) *et* (5.7)*, via le changement de variable* $x = y + \frac{\pi}{4}$.

$$\begin{array}{rcl} 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos y + \sin y) + \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos y - \sin y) & = & -2\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos y + \sin y)\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos y - \sin y) \\ 1 + \sqrt{2}\cos y & = & \sin^2 y - \cos^2 y \\ 1 + \sqrt{2}\cos y & = & (1 - \cos^2 y) - \cos^2 y \\ \sqrt{2}\cos y & = & -2\cos^2 y \\ \cos y(2\cos y - \sqrt{2}) & = & 0 \end{array}$$

Ce qui nous donne

$$\begin{array}{c} \cos y = 0 \quad ou \quad \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad ou \quad y = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{array}$$

On revient alors à la variable de départ, se souvenant que $x = y + \frac{\pi}{4}$

$$\begin{array}{c} x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad ou \quad x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \quad ou \quad x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{array}$$

Ce qui donne les solutions

$$\begin{array}{rcl} x & = & \frac{3\pi}{4} + k\pi \\ x & = & \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x & = & 2k\pi \end{array}$$

Seule la première solution est à conserver, les deux dernières solutions étant à rejeter au vu des conditions d'existence. L'ensemble des solutions sera

$$S = \left\{\frac{3\pi}{4} + k\pi\right\}, k \in \mathbb{Z}$$

◇

Exemple 7 *Juillet 2003 - Question 3*

Résoudre l'équation

$$\cos 2x + \cos 6x = 1 + \cos 8x \tag{C.11}$$

Cette équation ne comporte que des fonctions cosinus d'arguments différents. L'utilisation des formules de Carnot et/ou de Simpson est donc conseillée. La présence du 1*, qui se trouve uniquement dans la formule de Carnot, encourage à utiliser une fois cette formule. Reste à bien grouper les termes.*

Appliquer Simpson au membre de gauche nous donne

$$\cos 2x + \cos 6x = 2\cos 4x \cos 2x$$

Appliquer Carnot au membre de droite

$$1 + \cos 8x = 2\cos^2 4x$$

et le facteur $\cos 4x$ *est bien commun aux deux termes. Ce choix de groupement nous rend bien un facteur commun, qui peut être mis en évidence. L'équation* (C.11) *devient*

$$\begin{aligned} 2\cos 4x \cos 2x &= 2\cos^2 4x \\ 2\cos 4x(\cos 2x - \cos 4x) &= 0 \end{aligned}$$

L'équation de départ se réduit donc en deux équations de base.

$$\cos 4x = 0 \quad \textit{ou} \quad \cos 2x - \cos 4x = 0$$

Résolvons la première équation

$$\begin{aligned} \cos 4x &= 0 \\ 4x &= \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x &= \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} \end{aligned}$$

Résolvons la deuxième

$$\begin{aligned} \cos 2x - \cos 4x &= 0 \\ \cos 2x &= \cos 4x \\ 2x &= \pm 4x + 2k\pi \end{aligned}$$

$$2x = 4x + 2k\pi \quad ou \quad 2x = -4x + 2k\pi$$
$$x = k\pi \quad ou \quad x = \frac{k\pi}{3}$$

Au total, on aura donc

$$S = \left\{\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}\right\} \cup \left\{\frac{k\pi}{3}\right\}, k \in \mathbb{Z}$$

◇

Exemple 8 *Juillet 2007 - Question 3*

Résoudre

$$\sin 5x - \sin 3x = \cos 6x + \cos 2x$$

Il s'agit bien d'une équation comportant des fonctions sinus et cosinus d'arguments différents. L'absence de chiffre nous pousse à n'utiliser que les formules de Simpson. Si l'on applique ces formules aux membres de gauche et de droite tels qu'ils sont présentés, on aura respectivement

$$\begin{aligned} \sin 5x - \sin 3x &= 2\cos 4x \sin x \\ \cos 6x + \cos 2x &= 2\cos 4x \cos 2x \end{aligned}$$

Et on retrouve $\cos 4x$ *commun aux deux termes. On met ce facteur en évidence*

$$\begin{aligned} 2\cos 4x \sin x &= 2\cos 4x \cos 2x \\ \cos 4x(\sin x - \cos 2x) &= 0 \end{aligned}$$

Ce qui donne les deux équations de base

$$\cos 4x = 0 \quad ou \quad \sin x - \cos 2x = 0$$

On résout la première

$$\begin{aligned} \cos 4x &= 0 \\ x &= \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} \end{aligned}$$

Puis la deuxième

$$\begin{aligned} \sin x - \cos 2x &= 0 \\ \cos 2x &= \sin x \\ \cos 2x &= \cos(\frac{\pi}{2} - x) \\ 2x &= \pm(\frac{\pi}{2} - x) + 2k\pi \end{aligned}$$

$$2x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \quad ou \quad 2x = -(\frac{\pi}{2} - x) + 2k\pi$$
$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \quad ou \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

Au total, les solutions seront

$$S = \left\{\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right\}, k \in \mathbb{Z}$$

◇

Exemple 9 *Juillet 2008*

Résoudre

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \sqrt{2}(1 + \cos x + \cos 2x) \tag{C.12}$$

Il s'agit bien d'une équation où ne sont présentes que des fonctions sinus et cosinus, avec des arguments différents, mais l'utilisation des formules de Simpson et de Carnot ne permet pas directement d'avoir un facteur commun. On va ici travailler chaque membre séparément et espérer arriver à une expression similaire de chaque côté.

On commence par le membre de gauche. Appliquer Simpson aux premier et troisième termes semble le plus judicieux, car le facteur $\sin 2x$ *sera alors commun aux deux termes du membre de gauche et pourra être mis en évidence.*

$$\begin{aligned} \sin x + \sin 2x + \sin 3x &= \sin 2x + 2\sin 2x \cos(-x) \\ &= \sin 2x + 2\sin 2x \cos x \\ &= \sin 2x(1 + 2\cos x) \qquad \text{(C.13)} \end{aligned}$$

On laisse ce terme de côté pour le moment et on passe au membre de droite. Le 1 *nous indique Carnot. On groupe donc les premier et troisième termes, afin de faire apparaitre* $\cos x$*, qui sera commun au membre de droite.*

$$\begin{aligned} \sqrt{2}(1 + \cos x + \cos 2x) &= \sqrt{2}(\cos x + 2\cos^2 x) \\ &= \sqrt{2}\cos x(1 + 2\cos x) \qquad \text{(C.14)} \end{aligned}$$

Fort heureusement, les deux membres, représentés par les équations (C.13) *et* (C.14)*, ont le facteur* $1 + 2\cos x$ *en commun. L'équation de départ* (C.12) *devient alors*

$$\begin{aligned} \sin 2x(1 + 2\cos x) &= \sqrt{2}\cos x(1 + 2\cos x) \\ (1 + 2\cos x)(\sin 2x - \sqrt{2}\cos x) &= 0 \end{aligned}$$

Le facteur $(1 + 2\cos x)$ *est une équation de base, il n'est donc plus nécessaire de le modifier. Le facteur* $(\sin 2x - \sqrt{2}\cos x)$*, lui, doit encore être légèrement changé. Il suffit d'utiliser la formule de duplication* $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ *pour faire apparaitre le facteur* $\cos x$*, qui sera mis en évidence. Ce faisant,* (C.12) *devient finalement*

$$\cos x(1 + 2\cos x)(2\sin x - \sqrt{2}) = 0$$

qui se décompose en trois équations de base

$$\begin{aligned} \cos x &= 0 & \text{(C.15)} \\ 1 + 2\cos x &= 0 & \text{(C.16)} \\ 2\sin x - \sqrt{2} &= 0 & \text{(C.17)} \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à résoudre ces équations élémentaires.

L'équation (C.15) *admet pour solutions*

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

(C.16) *donne*

$$\begin{aligned} \cos x &= -\frac{1}{2} \\ x &= \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{aligned}$$

Enfin, (C.17) *devient*

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad ou \quad x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

Au total, l'ensemble des solutions sera

$$S = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\} \cup \left\{\pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right\} \cup \left\{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right\}$$

◇

Exemple 10 *Juillet 2010 - Question 2*

Résoudre l'équation

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \sin x \cos x \tag{C.18}$$

L'équation fait intervenir les termes $\sin^4 x$ *et* $\cos^4 x$. *Or on sait, via la formule fondamentale, que*

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\ (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 &= 1^2 \\ \sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x &= 1 \\ \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x \end{aligned}$$

On insère ceci dans (C.18)*, ce qui donne*

$$\begin{aligned} 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x &= \sin x \cos x \\ 2\sin^2 x \cos^2 x + \sin x \cos x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

et on obtient une équation du second degré en la variable $\sin x \cos x$. *Se souvenant de la formule de duplication* $2 \sin x \cos x = \sin 2x$, *on se ramène à l'équation du second degré en* $\sin 2x$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sin^2 2x + \frac{1}{2}\sin 2x - 1 &= 0 \\ \sin^2 2x + \sin 2x - 2 &= 0 \end{aligned}$$

Cette équation admet pour solutions

$$\sin 2x = 1 \quad \textit{ou} \quad \sin 2x = -2$$

La deuxième solution est à exclure. Reste donc à résoudre

$$\begin{aligned} \sin 2x &= 1 \\ 2x &= \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x &= \frac{\pi}{4} + k\pi \end{aligned}$$

Ce qui donne pour ensemble de solutions

$$S = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \right\}$$

◇

Exemple 11 *Juillet 2005 - Question 2*

Résoudre

$$\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{5}{8} \tag{C.19}$$

On commence par utiliser la formule

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

Dès lors, on aura ici

$$\begin{aligned}
\sin^6 x + \cos^6 x &= (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 \\
&= (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) \\
&= \sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x
\end{aligned}$$

On regroupe alors les termes existants pour faire apparaitre $(\sin^2 x + \cos^2 x)^2$

$$\begin{aligned}
\sin^6 x + \cos^6 x &= \sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x \\
&= \sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x - 3\sin^2 x \cos^2 x \\
&= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x \cos^2 x \\
&= 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x
\end{aligned}$$

Sachant cela, l'équation (C.19) *devient*

$$\begin{aligned}
1 - 3\sin^2 x \cos^2 x &= \frac{5}{8} \\
\sin^2 x \cos^2 x &= \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

On utilise enfin la formule de duplication $2\sin x \cos x$ *pour se ramener à l'équation de base*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\sin^2 2x &= \frac{1}{8} \\
\sin 2x &= \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \\
2x &= \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\
x &= \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Au total,

$$S = \left\{\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}\right\}, k \in \mathbb{Z}$$

◇

Exemple 12 *Septembre 2004 - Question 2*

Résoudre

$$\sin^3 x \cos x - \sin x \cos^3 x = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

Cet exercice est résolu en utilisant seulement les formules de duplication. Si l'on met le facteur $\sin x \cos x$ *en évidence, on fait directement apparaitre ces deux formules, à un facteur près.*

$$\begin{aligned}
\sin x \cos x(\sin^2 x - \cos^2 x) &= \frac{\sqrt{2}}{8} \\
\frac{1}{2} 2 \sin x \cos x(-(\cos^2 x - \sin^2 x)) &= \frac{\sqrt{2}}{8} \\
\frac{1}{2} \sin 2x(-\cos 2x) &= \frac{\sqrt{2}}{8} \\
\sin 2x \cos 2x &= -\frac{\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

On voit de nouveau apparaitre, à un facteur près, la formule de duplication du sinus. Cela donne donc

$$\begin{aligned}
2 \sin 2x \cos 2x &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \\
\sin 4x &= -\frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad &ou \quad 4x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \\
x = -\frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2} \quad &ou \quad x = \frac{5\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}
\end{aligned}$$

◇

Exemple 13 *Septembre 2003 - Question 3*

Résoudre

$$\cos 9x - 2\cos 6x = 2 \tag{C.20}$$

L'utilisation des formules de Simpson n'est pas possible, à cause du coefficient devant $\cos 6x$*. On va donc exprimer* $\cos 9x$ *et* $\cos 6$ *en fonction de* $\cos 3x$ *et de* $\sin 3x$*.*

$$\cos 6x = \cos^2 3x - \sin^2 3x$$

$$\begin{aligned}
\cos 9x &= \cos(6x + 3x) \\
&= \cos 6x \cos 3x - \sin 6x \sin 3x \\
&= (\cos^2 3x - \sin^2 3x)\cos 3x - (2\sin 3x \cos 3x)\sin 3x \\
&= \cos^3 3x - \sin^2 3x \cos 3x - 2\sin^2 3x \cos 3x \\
&= \cos^3 3x - 3\sin^2 3x \cos 3x
\end{aligned}$$

(C.20) *devient alors*

$$\cos^3 3x - 3\sin^2 3x \cos 3x - 2\cos^2 3x + 2\sin^2 3x - 2 \quad = \quad 0$$

Reste alors à remplacer $\sin^2 3x$ *par* $1 - \cos^2 3x$ *pour se ramener à une équation du troisième degré en* $\cos 3x$*.*

$$\begin{aligned}
\cos^3 3x - 3(1 - \cos^2 3x)\cos 3x - 2\cos^2 3x + 2(1 - \cos^2 3x) - 2 &= 0 \\
\cos^3 3x - 3\cos 3x + 3\cos^3 x - 2\cos^2 3x + 2 - 2\cos^2 3x - 2 &= 0 \\
4\cos^3 3x - 4\cos^2 3x - 3\cos 3x &= 0 \\
\cos 3x(4\cos^2 3x - 4\cos^x - 3) &= 0
\end{aligned}$$

On résout alors ces deux équations de base. D'une part,

$$\begin{aligned}
\cos 3x &= 0 \\
3x &= \frac{\pi}{2} + k\pi \\
x &= \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}
\end{aligned}$$

d'autre part,

$$4\cos^2 3x - 4\cos x - 3 \quad = \quad 0$$

$$\cos 3x = -\frac{1}{2} \quad ou \quad \cos 3x = \frac{3}{2}$$

La deuxième solution est à rejeter. Il reste donc

$$\begin{aligned} \cos 3x &= -\frac{1}{2} \\ 3x &= \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ x &= \pm\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \end{aligned}$$

Au total,

$$S = \{\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}\} \cup \{\pm\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\}, k \in \mathbb{Z}$$

◇

Exemple 14 *Septembre 2006 - Question 3*

Résoudre

$$2\sin^2 3x + \sin^2 6x = 2$$

Utiliser la formule de duplication du sinus puis la formule fondamentale conduit directement à une équation du second degré en $\sin^2 3x$*, qu'il suffit de résoudre.*

$$\begin{aligned}
2\sin^2 3x + \sin^2 6x &= 2 \\
2\sin^2 3x + (2\sin 3x\cos 3x)^2 - 2 &= 0 \\
2\sin^2 3x + 4\sin^2 3x\cos^2 3x - 2 &= 0 \\
2\sin^2 3x + 4\sin^2 3x(1-\sin^2 3x) - 2 &= 0 \\
2\sin^2 3x + 4\sin^2 3x - 4\sin^4 3x - 2 &= 0 \\
2\sin^4 3 - 3\sin^2 3x + 1 &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin^2 3x = 1 \quad &ou \quad \sin^2 3x = \frac{1}{2} \\
\sin 3x = \pm 1 \quad &ou \quad \sin 3x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \\
3x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad &ou \quad 3x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\
x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \quad &ou \quad x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6}
\end{aligned}$$

Au total,

$$S = \{\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}\} \cup x \in \{\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6}\}$$

$\diamond$

Exemple 15 *Juillet 2006 - Question 4*

Résoudre

$$\left(\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right)^2+\sin x=0 \tag{C.21}$$

Conditions d'existence

Deux conditions sont à exprimer. D'une part, il faut que

$$\begin{aligned}\cos\frac{x}{2} &\neq 0\\ \frac{x}{2} &\neq \frac{\pi}{2}+k\pi\\ x &\neq \pi+2k\pi\end{aligned}$$

d'autre part,

$$\begin{aligned}1-\tan\frac{x}{2} &\neq 0\\ \tan\frac{x}{2} &\neq 1\\ \frac{x}{2} &\neq \frac{\pi}{4}+k\pi\\ x &\neq \frac{\pi}{2}+2k\pi\end{aligned}$$

Au total, il faut que

$$x\neq(1+2k)\pi \quad et \quad x\neq\frac{\pi}{2}+2k\pi \tag{C.22}$$

Résolution

Plusieurs éléments nous poussent ici à nous ramener à une des formules en tangente avant de développer le carré. Premièrement, les tangentes sont en $\frac{x}{2}$, tandis que le sinus est en x. Afin de se ramener à des équations de base, il faut se ramener à un seul argument commun. Deuxièmement, développer le carré conduit vite à des expressions assez lourdes à manipuler et à un calcul non trivial. Pour éviter de manipuler de longues expressions, on commence par manipuler la fraction

$$\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}$$

Avec un peu d'expérience, cette écriture fait penser à la formule d'addition en tangente. Se souvenir que $1=\tan\frac{\pi}{4}$ permet en effet de s'y ramener. On a en effet

$$\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{x}{2}}=\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})$$

L'équation (C.21) *se réduit à*

$$\tan^2(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}) + \sin x = 0$$

ce qui est déjà plus compact. Il faut maintenant parvenir à modifier l'argument de la tangente. Pour ce faire, la seule solution est d'utiliser la formule fondamentale pour faire intervenir un terme en cosinus carré, puis d'utiliser Carnot pour doubler l'argument :

$$\begin{aligned}
\tan^2(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}) + \sin x &= 0 \\
\frac{1}{\cos^2(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2})} - 1 + \sin x &= 0 \\
\frac{2}{1 + \cos(\frac{\pi}{2} + x)} - 1 + \sin x &= 0 \\
\frac{2}{1 - \sin x} - 1 + \sin x &= 0 \\
\frac{1 + 2\sin x - \sin^2 x}{1 - \sin x} &= 0
\end{aligned}$$

Au vu des conditions d'existence, $\sin x$ *est différente de l'unité, donc on peut supprimer le dénominateur. Reste à résoudre l'équation du second degré en* $\sin x$

$$1 + 2\sin x - \sin^2 x = 0$$

Les solutions sont

$$\sin x = -1 + \sqrt{2} \quad ou \quad \sin x = -1 - \sqrt{2}$$

La deuxième solution est évidemment à rejeter. Reste donc à résoudre

$$\sin x = -1 + \sqrt{2}$$

$$x = \arcsin(-1 + \sqrt{2}) + 2k\pi \quad ou \quad x = \pi - \arcsin(-1 + \sqrt{2}) + 2k\pi$$

Ce qui donne au total

$$S = \{\arcsin(-1 + \sqrt{2}) + 2k\pi\} \cup \{\pi - \arcsin(-1 + \sqrt{2}) + 2k\pi\}, k \in \mathbb{Z}$$

Résolution alternative

On pourrait également résoudre cette équation en se ramenant uniquement à des fonctions sinus et cosinus.

$$\left(\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right)^2 = \left(\frac{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}\right)^2 = \left(\frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}+2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}-2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}\right) = \frac{1+\sin x}{1-\sin x}$$

(C.21) *deviendrait alors*

$$\begin{aligned} \frac{1+\sin x}{1-\sin x}+\sin x &= 0 \\ \frac{1+2\sin x-\sin^2 x}{1-\sin x} &= 0 \end{aligned}$$

qui est bien l'équation obtenue précédemment.

$\diamond$

Exemple 16 *Septembre 2009*

Résoudre l'équation

$$\tan x + \tan 2x + \tan 3x = 0$$

Conditions d'existence

Il faut que $\tan x$, $\tan 2x$ *et* $\tan 3x$ *soient définies, c'est-à-dire que*

$$\begin{aligned} x &\neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x &\neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x &\neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \end{aligned}$$

Résolution

Développer $\tan 3x$ *à l'aide de la formule d'addition nous fournit le facteur commun* $\tan x + \tan 2x$*, qui sera mis en évidence*

$$\begin{aligned} \tan x + \tan 2x + \tan 3x &= 0 \\ \tan x + \tan 2x + \frac{\tan x + \tan 2x}{1 - \tan x \tan 2x} &= 0 \\ (\tan x + \tan 2x)(2 - \tan x \tan 2x) &= 0 \end{aligned}$$

On obtient une équation de base, et une qui deviendra une équation algébrique du second degré en $\tan x$ *une fois le facteur* $\tan 2x$ *développé.*

$$\begin{aligned} \tan x + \tan 2x = 0 \quad &ou \quad 2 - \tan x \tan 2x = 0 \\ \tan x = -\tan(2x) \quad &ou \quad 2 - \frac{2\tan^2 x}{1 - \tan^2 x} = 0 \\ \tan x = \tan(-2x) \quad &ou \quad 2 - 4\tan^2 x = 0 \\ x = -2x + k\pi \quad &ou \quad \tan x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x = \frac{k\pi}{3} \quad &ou \quad x = \pm \arctan\frac{\sqrt{2}}{2} + k\pi \end{aligned}$$

Ces solutions étant compatibles avec les conditions d'existence, l'ensemble de solutions sera

$$S = \left\{\frac{k\pi}{3}\right\} \cup \left\{\pm \arctan\frac{\sqrt{2}}{2} + k\pi\right\}, k \in \mathbb{Z}$$

Résolution alternative

Il est tout à fait possible de résoudre l'équation ramenée aux fonctions sinus et cosinus.

Cependant, le calcul est nettement plus long, et il faut utiliser un certain nombre de formules pour se ramener à des équations de base.

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin 2x}{\cos 2x} + \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = 0$$

Réduire au même dénominateur permet de faire apparaitre les formules d'addition du sinus. Reste à choisir quels termes grouper. Rassembler le premier et le troisième permet de faire apparaitre $\sin 4x$*. Utiliser alors la duplication nous autorise à mettre le facteur* $\sin 2x$ *en évidence.*

$$\begin{aligned}
\frac{\sin x \cos 3x + \sin 3x \cos x}{\cos x \cos 3x} + \frac{\sin 2x}{\cos 2x} &= 0 \\
\frac{\sin 4x}{\cos x \cos 3x} + \frac{\sin 2x}{\cos 2x} &= 0 \\
\sin 2x \left(\frac{2 \cos 2x}{\cos x \cos 3x} + \frac{1}{\cos 2x} \right) &= 0
\end{aligned}$$

Mettre l'expression entre parenthèses au même dénominateur permet de simplifier celui-ci, les conditions d'existence ayant déjà été posées. On en tire que

$$\sin 2x (2 \cos^2 2x + \cos x \cos 3x) = 0$$

On utilise alors les formules de Simpson puis de Carnot pour se ramener à une équation algébrique du deuxième degré en $\cos 2x$

$$\begin{aligned}
\sin 2x (2 \cos^2 2x + \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x) &= 0 \\
\sin 2x (2 \cos^2 2x + \frac{1}{2}(2 \cos^2 2x - 1) + \frac{1}{2} \cos 2x) &= 0 \\
\sin 2x (3 \cos^2 2x + \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2}) &= 0 \\
\sin 2x (6 \cos^2 2x + \cos 2x - 1) &= 0
\end{aligned}$$

Cela donne donc deux équations de base. Résolvons la première

$$\begin{aligned}
\sin 2x &= 0 \\
2x &= k\pi \\
x &= \frac{k\pi}{2}
\end{aligned}$$

Puis la deuxième

$$6 \cos^2 2x + \cos 2x - 1 = 0$$

$$\begin{aligned}
\cos 2x = \frac{1}{2} \quad &ou \quad \cos 2x = \frac{1}{3}\\
2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad &ou \quad 2x = \pm\arccos\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi\\
x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi \quad &ou \quad x = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1}{3}\right) + k\pi
\end{aligned}$$

Au total, cela donne les mêmes solutions que précédemment

◇

Exemple 17 *Juillet 2004 - Question 2*

$$\cot x - \tan x - 2\tan 2x - 4\tan 4x > 8\sqrt{3} \tag{C.23}$$

Conditions d'existence

Ces fonctions seront définies si

$$\begin{aligned} x &\neq \frac{k\pi}{2} \\ x &\neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x &\neq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} \end{aligned}$$

Résolution

Il faut, d'une manière ou d'une autre, factoriser cette expression. Pour ce faire, les différentes fonctions doivent avoir le même argument. Développer $\tan 4x$ *en terme de* $\tan x$ *ne semblant pas très judicieux, on va plutôt regrouper les termes en* x *et* $2x$ *pour se ramener à* $4x$*. Pour cela, on peut soit exprimer* $\cot$ *et* $\tan x$ *à l'aide des cosinus et sinus et utiliser les formules d'addition et de duplication, soit remarquer directement que*

$$\begin{aligned} \cot x - \tan x &= \frac{1}{\tan x} - \tan x \\ &= \frac{1 - \tan^2 x}{\tan x} \\ &= 2\frac{1 - \tan^2 x}{2\tan x} \\ &= \frac{2}{\tan 2x} \\ &= 2\cot 2x \end{aligned}$$

L'équation (C.23) *devient donc*

$$\begin{aligned} 2\cot 2x - 2\tan 2x - 4\tan 4x &> 8\sqrt{3} \\ \cot 2x - \tan 2x - 2\tan 4x &> 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

On répète deux fois ce procédé, pour arriver à

$$\begin{aligned} \cot 8x &> \sqrt{3} \\ \cot 8x - \sqrt{3} &> 0 \end{aligned}$$

Une fois à ce stade, il faut étudier le signe des différents facteurs. Ici, il n'y en a qu'un. A l'aide du cercle trigonométrique, on recherche donc les angles tels que l'inégalité est vérifiée. On sait que la cotangente est supérieure à $\sqrt{3}$ *si son argument est compris entre* 0 *et* $\frac{\pi}{6}$*, ou entre* π *et* $\frac{7\pi}{6}$*. Ceci est bien sûr valable à* 2π *près. Il faut donc que l'argument de la cotangente,* $8x$*, soit compris entre un de ces deux intervalles, c'est-à-dire que*

$$\begin{aligned} 0+2k\pi \leq 8x < \frac{\pi}{6}+2k\pi \quad &ou \quad \pi+2k\pi \leq 8x < \frac{7\pi}{6}+2k\pi \\ 2k\pi \leq 8x < \frac{\pi}{6}+2k\pi \quad &ou \quad (1+2k)\pi < 8x \leq \frac{7\pi}{6}+2k\pi \end{aligned}$$

Cela donne donc deux inéquations à résoudre, suivant les règles classiques de l'algèbre. Ici, il suffit de diviser chaque inéquation par 8 *pour obtenir la solution finale*

$$\frac{k\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{48}+\frac{k\pi}{4} \quad ou \quad \frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4} \leq x < \frac{7\pi}{48}+\frac{k\pi}{4}$$

Ce qui s'écrit de manière plus compacte

$$\frac{k\pi}{8} \leq x < \frac{\pi}{48}+\frac{k\pi}{8}$$

Au vu des conditions d'existence, on sait que

$$x \neq \frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}$$

Dès lors, l'inégalité devient stricte. Au total, l'ensemble des solutions est

$$S = \left\{ \frac{k\pi}{8} < x < \frac{\pi}{48}+\frac{k\pi}{8} \right\}, k \in \mathbb{Z}$$

Exemple 18 *Juillet 2004 - Question 1*

Montrer que

$$\frac{\sin 2x + \sin 2y}{\cos 2x + \cos 2y} = \tan(x+y)$$

Résolution

Le membre de gauche fait intervenir les arguments $2x$ *et* $2y$*, tandis que celui de droite ne contient que* $x+y$*. Les formules de Simpson permettent cette transition. On part donc du membre de gauche et on utilise ces formules.*

$$\begin{aligned} lhs &= \frac{2\sin(x+y)\cos(x-y)}{2\cos(x+y)\cos(x-y)} \\ &= \tan(x+y) \end{aligned}$$

ce qui suffit.

Conditions d'existence

Pour simplifier par $\cos(x-y)$*, il faut que*

$$x \neq y + \frac{\pi}{2} + k\pi$$

De plus, la tangente n'est définie que si

$$x \neq -y + \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Regroupant ces deux conditions, cela donne

$$x \neq \pm y + \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$\diamond$

Exemple 19 *Juillet 2002 - Question 1b*

Montrer que

$$\frac{1-\cos 2a+\sin 2a}{1+\cos 2a+\sin 2a}=\tan a$$

Résolution

On remarque que le membre de gauche fait intervenir des fonctions en $2a$*, tandis que celui de droite ne contient que l'argument* a*. Partir du membre de gauche et utiliser des formules de duplication semble tout indiqué. La présence du chiffre* 1 *précise même que Carnot peut être considéré. On aura donc*

$$\begin{aligned} lhs &= \frac{2\sin^2 a+2\sin a\cos a}{2\cos^2 a+2\sin a\cos a} \\ &= \frac{\sin a}{\cos a}\frac{\sin a+\cos a}{\sin a+\cos a} \\ &= \tan a \end{aligned}$$

et l'identité est déjà démontrée.

Conditions d'existence

Cette identité n'est pas valable quelle que soit la valeur de a*. On a, au cours de la résolution, simplifié le facteur* $\sin a+\cos a$*. Ceci n'est légal que si*

$$\begin{aligned} \cos a+\sin a &\neq 0 \\ \cos a &\neq \cos(\frac{\pi}{2}+a) \end{aligned}$$

$$\begin{gathered} a\neq\frac{\pi}{2}+a+2k\pi \quad et \quad a\neq-\frac{\pi}{2}-a+2k\pi \\ 0\neq\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad et \quad a\neq-\frac{\pi}{4}+k\pi \end{gathered}$$

De plus, la fonction tangente n'existe que si

$$a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$$

Au total, il faut que

$$a\neq-\frac{\pi}{4}+k\pi \quad et \quad a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

◇

Exemple 20 *Septembre 2002 - Question 1*

Démontrer que[4]

$$\csc a = \cot \frac{a}{2} - \cot a \tag{C.24}$$

Calculer ensuite la valeur de

$$\csc a + \csc 2a + \csc 4a + \csc 8a \tag{C.25}$$

Résolution

Commençons par prouver l'identité (C.24)*, qui n'est valable que si* $a \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$*. Au vu de cette identité, il semble judicieux de regrouper les fonctions ayant a pour argument à gauche, puis d'exprimer ces fonctions en terme de sinus et cosinus avant d'utiliser les formules de duplication pour se ramener à l'argument* $\frac{a}{2}$*. L'équation* (C.24) *devient*

$$\csc a + \cot a = \cot \frac{a}{2}$$

On part du membre de gauche de cette identité.

$$\begin{aligned} lhs &= \frac{1+\cos a}{\sin a} \\ &= \frac{2\cos^2 \frac{a}{2}}{2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}} \\ &= \frac{\cos \frac{a}{2}}{\sin \frac{a}{2}} \\ &= \cot \frac{a}{2} \end{aligned}$$

L'identité (C.24) *est donc démontrée.*

On calcule alors la valeur de (C.25)*. Pour ce faire, on va utiliser l'identité que l'on vient de démontrer. Ce faisant, on obtient*

$$\begin{aligned} & \csc a + \csc 2a + \csc 4a + \csc 8a \\ = \; & \cot \frac{a}{2} - \cot a + \cot a - \cot 2a + \cot 2a - \cot 4a + \cot 4a - \cot 8a \\ = \; & \cot \frac{a}{2} - \cot 8a \end{aligned}$$

Ce qui n'est valable que si $a \neq k\frac{\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$

◇

4. Pour rappel, $\csc a = \frac{1}{\sin a}$

Exemple 21 *Juillet 2010 - Question 1*

Montrer que l'on a

$$4(\cos^6 a - \sin^6 a) = \cos 2a(4 - \sin^2 2a)$$

Résolution

Le membre de gauche est de degré six et les fonctions ont pour argument a. Celui de droite est de degré deux, mais les fonctions ont l'argument $2a$*. Le plus simple est donc de commencer par réduire le membre de gauche à l'aide de la formule bien connue* $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^4)$*, car le premier facteur nous donnera directement* $\cos 2a$ *En effet,*

$$\begin{aligned} lhs &= 4(\cos^2 a - \sin^2 a)(\cos^4 a + \sin^2 a \cos^2 a + \sin^4 a) \\ &= 4\cos 2a(\cos^4 a + \sin^2 a \cos^2 a + \sin^4 a) \qquad \text{(C.26)} \end{aligned}$$

La forme du deuxième facteur doit directement faire penser à la formule fondamentale. Le développement qui suit est une astuce très souvent utilisée pour réduire la complexité d'un facteur de cette forme.

$$\begin{aligned} 1 &= \cos^2 a + \sin^2 a \\ 1^2 &= (\cos^2 a + \sin^2)^2 \\ 1 &= \cos^4 a + 2\sin^2 a \cos^2 a + \sin^4 a \\ 1 - \sin^2 a \cos^2 a &= \cos^4 a + \sin^2 a \cos^2 a + \sin^4 a \end{aligned}$$

On insère ceci dans (C.26)*, ce qui donne*

$$lhs = 4\cos 2a(1 - \sin^2 a \cos^2 a)$$

Observant le membre de droite, on doit parvenir à faire apparaitre le terme $\sin^2 2a$*. On utilise donc la duplication du sinus*

$$\begin{aligned} lhs &= 4\cos 2a\left(1 - \left(\frac{2\sin a \cos a}{2}\right)^2\right) \\ &= 4\cos 2a\left(1 - \frac{\sin^2 2a}{4}\right) \\ &= \cos 2a(1 - \sin^2 2a) \end{aligned}$$

Et l'identité est démontrée.

$\diamond$

Exemple 22 *Juillet 2010 - Question 4*

Calculer

$$E = \tan 9^\circ - \tan 27^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ \tag{C.27}$$

Résolution

Il s'agit d'une identité car la calculatrice permet de connaître la valeur à atteindre, qui est de 4. *On doit donc trouver des combinaisons de ces nombres qui font soit apparaitre des angles remarquables, comme* 45 *ou* 30, *soit qui suppriment les différents termes. Dans ce cas, on remarque que les arguments des tangentes sont complémentaires deux à deux. Or on sait que*

$$\begin{aligned}
\tan a + \tan b &= \frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b} \\
&= \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b} \\
&= \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b}
\end{aligned}$$

Comme on a ici des angles complémentaires, leur somme vaut 90 *et le sinus de* 90 *vaut 1. On applique donc ce développement pour déjà réduire l'expression* (C.27)

$$\begin{aligned}
E &= \frac{\sin 9^\circ}{\cos 9^\circ} - \frac{\sin 27^\circ}{\cos 27^\circ} - \frac{\sin 63^\circ}{\cos 63^\circ} + \frac{\sin 81^\circ}{\cos 81^\circ} \\
&= \frac{\sin 9^\circ \cos 81^\circ + \cos 9^\circ \sin 81^\circ}{\cos 9^\circ \cos 81^\circ} - \frac{\sin 27^\circ \cos 63^\circ + \cos 27^\circ \sin 63^\circ}{\cos 27^\circ \cos 63^\circ} \\
&= \frac{\sin 90^\circ}{\cos 9^\circ \cos 81^\circ} - \frac{\sin 90^\circ}{\cos 27^\circ \cos 63^\circ} \\
&= \frac{1}{\cos 9^\circ \cos 81^\circ} - \frac{1}{\cos 27^\circ \cos 63^\circ}
\end{aligned}$$

On sait qu'il faut se débarrasser des fonctions cosinus, vu que la réponse est 4. *Les angles étant toujours des angles complémentaires, appliquer Simpson à chaque dénominateur permet de faire apparaitre le terme* $\cos 90$, *qui est nul. Ce faisant, l'équation de départ se simplifie en*

$$\begin{aligned}
E &= \frac{2}{2\cos 9^\circ \cos 81^\circ} - \frac{2}{2\cos 27^\circ \cos 63^\circ} \\
&= \frac{2}{\cos 90^\circ + \cos 72^\circ} - \frac{2}{\cos 90^\circ + \cos 36^\circ} \\
&= \frac{2}{\cos 72^\circ} - \frac{2}{\cos 36^\circ} \\
&= 2\left(\frac{1}{\cos 72^\circ} - \frac{1}{\cos 36^\circ}\right)
\end{aligned}$$

Le préfacteur 2 est apparu, ce qui est bon signe. Toujours dans l'optique d'éliminer les fonctions, on réduit au même dénominateur et on factorise le numérateur, via Simpson. On espère alors que ceux-ci se simplifieront, vu que le préfacteur 4 sera apparu.

$$\begin{aligned} E &= 2\left(\frac{\cos 36^\circ - \cos 72^\circ}{\cos 36^\circ \cos 72^\circ}\right) \\ &= -4\left(\frac{\sin 54^\circ \sin(-18^\circ)}{\cos 36^\circ \cos 72^\circ}\right) \\ &= 4\left(\frac{\sin 54^\circ \sin 18^\circ}{\cos 36^\circ \cos 72^\circ}\right) \end{aligned}$$

En outre, on sait que

$$\begin{aligned} \sin 54^\circ &= \cos(90^\circ - 54^\circ) &= \cos 36^\circ \\ \sin 18^\circ &= \cos(90^\circ - 18^\circ) &= \cos 18^\circ \end{aligned}$$

ce qui donne bien

$$E = 4$$

Cet exercice, qui n'est pas le plus simple, est résolu en gardant à l'esprit qu'il faut neutraliser les fonctions trigonométriques. Ayant remarqué que les arguments des tangentes sont des angles complémentaires, on essaie donc de grouper ces différentes fonctions pour obtenir l'argument remarquable 90*. Les formules permettant cela sont les formules de Simpson, utilisées dans les deux sens, ainsi que le développement classique permettant d'additionner deux tangentes.*

$\diamond$

Exemple 23 *Septembre 2001 - Question 1*

Montrer que

$$\sin 3a = 4\sin(60^\circ - a)\sin a \sin(60^\circ + a)$$

Résolution

Comme mentionné précédemment, on va partir du membre de droite et utiliser des formules qui permettent de supprimer les arguments. On utilise par exemple la formule d'addition, ce qui donne

$$\begin{aligned}
rhs &= 4(\sin 60^\circ \cos a - \cos 60^\circ \sin a)\sin a(\sin 60^\circ \cos a + \cos 60^\circ \sin a) \\
&= 4(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos a - \frac{1}{2}\sin a)\sin a(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos a + \frac{1}{2}\sin a) \\
&= 4(\frac{3}{4}\cos^2 a - \frac{1}{4}\sin^2 a)\sin a \\
&= \sin a(3\cos^2 a - \sin^2 a) \\
&= 3\cos^2 a \sin a - \sin^3 a \qquad (C.28)
\end{aligned}$$

On a maintenant deux possibilités. On sait que l'expression (C.28) *doit être égale à* $\sin 3a$*. Soit on continue de manipuler cette expression et on essaie de remonter à l'aide des formules d'addition vers* $\sin 3a$*. Soit on laisse ce membre tel quel pour l'instant et on développe le membre de gauche pour qu'il ne fasse plus intervenir que l'argument* a*, en espérant arriver au résultat donné par* (C.28)*. C'est cette procédure que nous allons suivre, les puristes désirant suivre la première méthode n'auront qu'à refaire le raisonnement qui suit dans l'autre sens.*

$$\begin{aligned}
lhs &= \sin(2a + a) \\
&= \sin 2a \cos a + \sin a \cos 2a \\
&= 2\sin a \cos a \cos a + \sin a(\cos^2 a - \sin^2 a) \\
&= 2\sin a \cos^2 a + \sin a \cos^2 a - \sin^3 a \\
&= 3\sin a \cos^2 a - \sin^3 a \qquad (C.29)
\end{aligned}$$

Les expressions données par (C.28) *et* (C.29) *étant les mêmes, l'identité est bien démontrée.*

◇

Exemple 24 *Juillet 2003 - Question 1*

Montrer que

$$\sin^2 x + \sin^2\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin^2\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}$$

Résolution

L'idée est ici de partir du membre de gauche, d'éliminer x, et de ne plus conserver que des angles remarquables. Le plus rapide est de commencer par la formule de Carnot. Cela permet d'éliminer les carrés, et nous fournira trois cosinus, auxquels pourront être appliquées les formules de Simpson. Suivant ce raisonnement, on a

$$\begin{aligned}
lhs &= \frac{1}{2}(1-\cos 2x) + \frac{1}{2}\left(1-\cos\left(2x+\frac{4\pi}{3}\right)\right) + \frac{1}{2}\left(1-\cos\left(2x-\frac{4\pi}{3}\right)\right) \\
&= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\cos 2x + \cos\left(2x+\frac{4\pi}{3}\right) + \cos\left(2x-\frac{4\pi}{3}\right)\right) \\
&= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\cos 2x + 2\cos 2x \cos\frac{4\pi}{3}\right) \\
&= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\cos 2x + 2\cos 2x \frac{-1}{2}\right) \\
&= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\cos 2x - \cos 2x\right) \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Résolution alternative

Celui qui ne pense pas à utiliser Carnot et choisit d'utiliser directement les formules d'addition parvient également au même résultat. Les calculs sont cependant un peu plus lourds. En effet, on aurait eu

$$\begin{aligned}
lhs &= \sin^2 x + \left(\sin x \cos\frac{2\pi}{3} + \cos x \sin\frac{2\pi}{3}\right)^2 + \left(\sin x \cos\frac{-2\pi}{3} + \cos x \sin\frac{-2\pi}{3}\right)^2 \\
&= \sin^2 x + \left(\frac{-1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)^2 + \left(\frac{-1}{2}\sin x + \frac{-\sqrt{3}}{2}\cos x\right)^2 \\
&= \sin^2 x + \frac{1}{4}\sin^2 x + \frac{3}{4}\cos^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cos x + \frac{1}{4}\sin^2 x + \frac{3}{4}\cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x \cos x \\
&= \sin^2 x + \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{3}{2}\cos^2 x \\
&= \sin^2 x + \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{3}{2}(1-\cos^2 x) \\
&= \sin^2 x + \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\cos^2 x) \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

◇

Exemple 25 *Septembre 1999 - Question 2*

Montrer que, dans un triangle, on a

$$\sin A - \sin B + \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

Résolution

Deux raisons nous poussent à partir du membre de gauche pour se ramener à celui de droite. D'une part, il est souvent plus facile de transformer une somme en produit qu'un produit en somme. D'autre part, les formules de Simpson et de duplication sont plus facile à manipuler si l'on part de l'angle et que l'on va vers sa moitié, plutôt que dans le sens contraire. On utilise ici la démarche classique dans les triangles. On va exprimer A en fonction de B et C

$$\begin{aligned} A &= \pi - B + C \\ \sin A &= \sin(B + C) \end{aligned}$$

et utiliser la formule de Simpson pour grouper les deux autres termes

$$-\sin B + \sin C \quad = \quad 2 \cos \left(\frac{B+C}{2} \right) \sin \left(\frac{B-C}{2} \right)$$

On a donc

$$lhs \quad = \quad \sin(B + C) + 2 \cos \left(\frac{B+C}{2} \right) \sin \left(\frac{B-C}{2} \right)$$

Comme toujours lorsque l'on manipule des arguments multiples l'un de l'autre, on utilise la duplication pour se ramener à une valeur commune. Cela permet la mise en évidence d'un premier facteur.

$$\begin{aligned} lhs &= 2 \sin \left(\frac{B+C}{2} \right) \cos \left(\frac{B+C}{2} \right) + 2 \cos \left(\frac{B+C}{2} \right) \sin \left(\frac{B-C}{2} \right) \\ &= 2 \cos \left(\frac{B+C}{2} \right) \left(\sin \left(\frac{B+C}{2} \right) + \sin \left(\frac{B-C}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

L'utilisation de l'hypothèse nous fournit le premier facteur désiré, Simpson les deux suivants. En effet,

$$\begin{aligned} \frac{B+C}{2} &= \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \\ \cos \left(\frac{B+C}{2} \right) &= \sin \frac{A}{2} \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{B+C}{2}\right)+\sin\left(\frac{B-C}{2}\right) &= 2\sin\left(\frac{\frac{B+C}{2}+\frac{B-C}{2}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{B+C}{2}-\frac{B-C}{2}}{2}\right)\\ &= 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\end{aligned}$$

On a donc bien

$$\begin{aligned}lhs &= 2\sin\frac{A}{2}2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\\ &= 4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\end{aligned}$$

$\diamond$

Exemple 26 *Juillet 2008 - Question 1*

Montrer que, dans tout triangle, on a

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4\cos A \cos B \cos C$$

Résolution

Pour les mêmes raisons qu'à l'exemple précédent, on part du membre de gauche. A nouveau, on exprime A *en fonction de* B *et* C

$$\begin{aligned} A &= \pi - B - C \\ \cos 2A &= \cos(2\pi - (2B + 2C)) \\ \cos 2A &= \cos(2B + 2C) \end{aligned}$$

et on groupe les autres termes avec Simpson.

$$\cos 2B + \cos 2C = 2\cos(B + C)\cos(B - C)$$

Dès lors,

$$lhs = \cos(2B + 2C) + 2\cos(B + C)\cos(B - C)$$

On désire travailler avec les angles pour arguments, non leur double. De plus, un terme -1 *est attendu. On utilise donc Carnot pour faire apparaitre ce terme et avoir un facteur commun.*

$$\begin{aligned} lhs &= -1 + 2\cos^2(B + C) + 2\cos(B + C)\cos(B - C) \\ &= -1 + 2\cos(B + C)(\cos(B + C) + \cos(B - C)) \end{aligned}$$

On utilise à nouveau Simpson, ce qui fait apparaitre les facteurs $\cos B$ *et* $\cos C$*.*

$$lhs = -1 + 4\cos(B + C)\cos B \cos C$$

Et enfin, la relation des triangles

$$\begin{aligned} B + C &= \pi - A \\ \cos(B + C) &= -\cos A \end{aligned}$$

Ce qui nous mène bien à

$$lhs = -1 - 4\cos A \cos B \cos C$$

$\diamond$

Exemple 27 *Septembre 2009 - Question 1*

Dans tout triangle ABC, montrer que

$$\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1 \tag{C.30}$$

Résolution

Cette identité se démontre de manière similaire aux précédentes. On commence par l'exprimer en termes de tangentes, pour simplifier l'écriture. Ceci n'est valable que si le triangle n'est pas rectangle. Sinon, si on suppose qu'il l'est en A, l'égalité devient

$$\begin{aligned} \cot B \cot C &= 1 \\ \tan B &= \cot C \end{aligned}$$

ce qui est trivialement vrai.
Si le triangle n'est pas rectangle, on a donc

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$$

Ensuite, on travaille en fonction de sinus et de cosinus, on réduit progressivement au même dénominateur et on utilise les formules qui s'imposent. On va de nouveau partir du membre de gauche et factoriser. On commence, par exemple, par utiliser la relation des triangles pour modifier A, et réduire les deux autres termes au même dénominateur.

$$\begin{aligned} lhs &= \tan(\pi - B - C) + \frac{\sin B}{\cos B} + \frac{\sin C}{\cos C} \\ &= -\tan(B+C) + \frac{\sin B \cos C + \sin C \cos B}{\cos C \cos B} \\ &= -\frac{\sin(B+C)}{\cos(B+C)} + \frac{\sin(B+C)}{\cos B \cos C} \\ &= \sin(B+C)\left(\frac{-1}{\cos(B+C)} + \frac{1}{\cos B \cos C}\right) \end{aligned}$$

On continue la réduction au même dénominateur. Ceci fait, on remarque que l'utilisation d'une formule d'addition permet une belle simplification

$$\begin{aligned} lhs &= \sin(B+C)\left(\frac{\cos B \cos C - \cos(B+C)}{\cos(B+C)\cos B \cos C}\right) \\ &= \sin(B+C)\left(\frac{-\sin B \sin C}{\cos(B+C)\cos B \cos C}\right) \\ &= -\tan(B+C)\tan B \tan C \end{aligned}$$

On conclut par l'utilisation de la formule des angles, qui nous fournit le membre de droite attendu

$$lhs \quad = \quad \tan A \tan B \tan C$$

On remarque donc que, lorsqu'on désire passer des tangentes aux sinus et cosinus, on doit réduire différents termes au même dénominateur pour faire apparaitre la formule d'addition. Cette mise au même dénominateur doit se faire étape par étape, pour éviter de se perdre dans des expressions d'une lourdeur excessive.

◇

Exemple 28 *Septembre 2004 - Question 1*

Démontrer que si les angles d'un triangle ABC satisfont à la relation

$$\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C} \tag{C.31}$$

alors le triangle est rectangle en A.

Conditions d'existence.

L'équation (C.31) *n'a de sens que si*

$$\begin{aligned} \cos B + \cos C &\neq 0 \\ \cos B &\neq \cos(\pi - C) \\ B &\neq \pm(\pi - C) + 2k\pi \end{aligned}$$

Sachant que l'on est dans un triangle, donc que chacun des angles est compris entre 0 *et* π, *cela donne pour condition*

$$\begin{aligned} B &\neq \pi - C \\ B + C &\neq \pi \\ A &\neq 0 \end{aligned}$$

car l'autre relation

$$B \neq C - \pi + 2k\pi$$

n'est jamais vérifiée dans un triangle. La condition d'existence revient donc à imposer que le triangle ABC soit non dégénéré.

Résolution

On est bien dans le cas où une hypothèse supplémentaire, l'équation (C.31), *nous est fournie. On va manipuler cette équation et l'écrire sous une forme qui affirmera que le triangle est rectangle en A. Si l'on parvient, par exemple, à obtenir une équation ne faisant plus intervenir que cet angle, cela devrait suffire.*

On va donc utiliser la formule de Simpson pour faire apparaitre l'argument $\frac{B+C}{2}$, qui sera alors exprimé en fonction de A à l'aide de la relation entre les angles. Ce faisant, (C.31) *devient*

$$\begin{aligned}
\sin A &= \frac{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}} \\
\sin A &= \frac{\sin\frac{B+C}{2}}{\cos\frac{B+C}{2}} \\
\sin A &= \tan\frac{B+C}{2} \\
\sin A &= \cot\frac{A}{2}
\end{aligned}$$

Comme attendu, on obtient une équation ne faisant plus intervenir que l'angle A. Reste à utiliser la duplication du sinus pour pouvoir résoudre cette équation.

$$\begin{aligned}
\sin A &= \cot\frac{A}{2} \\
2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} &= \cot\frac{A}{2} \\
2\sin\frac{A}{2} &= \frac{1}{\sin\frac{A}{2}}\ ;\ A\in]0,\pi[\Rightarrow \cos\tfrac{A}{2}>0 \\
\sin^2\frac{A}{2} &= \frac{1}{2} \\
\sin\frac{A}{2} &= \frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ A\in]0,\pi[\Rightarrow \sin\tfrac{A}{2}>0 \\
\frac{A}{2} &= \frac{\pi}{4}\ ;\ A\in]0,\pi[\Rightarrow \tfrac{A}{2}\in]0,\tfrac{\pi}{2}[\\
\\
A &= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

et le triangle est rectangle en A.

◇

Exemple 29 *Juillet 2005 - Question 4*

Montrer que, si x et y vérifient

$$\tan^2 x = 2\tan^2 y + 1 \tag{C.32}$$

alors on a l'égalité

$$\cos 2x + \sin^2 y = 0 \tag{C.33}$$

Résolution

On va partir de l'hypothèse et la manipuler pour arriver à l'expression souhaitée. On doit donc faire apparaitre $\cos 2x$ *à partir de* $\tan^2 x$*, et* $\sin^2 y$ *à partir de* $\tan^2 y$*.*

$\cos 2x$ *provient des formules de duplication ou de Carnot, qui nécessitent des termes comme* 1, $\cos^2 x$ *ou encore* $\sin^2 x$*. Or, à partir de* $\tan^2 x$, $\cos^2 x$ *peut être obtenu à partir des dérivés de la formule fondamentale. Cela donnerait donc*

$$\begin{aligned} \tan^2 x &= \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \\ &= \frac{2}{1+\cos 2x} - 1 \end{aligned} \tag{C.34}$$

$\sin^2 y$ *vient de* $\tan^2 y$ *en utilisant la formule fondamentale et ses dérivés*

$$\begin{aligned} \tan^2 y &= \frac{1}{\cos^2 y} - 1 \\ &= \frac{1}{1-\sin^2 y} - 1 \end{aligned} \tag{C.35}$$

On insère les expressions (C.34) *et* (C.35) *dans* (C.32) *:*

$$\begin{aligned} \tan^2 x &= 2\tan^2 y + 1 \\ \frac{2}{1+\cos 2x} - 1 &= \frac{2}{1-\sin^2 y} - 2 + 1 \\ 1 - \sin^2 y &= 1 + \cos 2x \\ 0 &= \sin^2 y + \cos 2x \end{aligned}$$

Ce qui est bien la thèse (C.33)*.*

$\diamond$

Exemple 30 *Juillet 2007 - Question 2*

Montrer que, si a, b, c sont des nombres positifs vérifiant

$$a > c \quad et \quad c^2 = a^2 - b^2$$

alors l'expression

$$I = \sqrt{(a\cos\phi + c)^2 + b^2\sin^2\phi} + \sqrt{(a\cos\phi - c)^2 + b^2\sin^2\phi} \tag{C.36}$$

est indépendante de ϕ. Trouver cette valeur.

Résolution

On doit donc montrer que l'équation (C.36) *est indépendante de ϕ, c'est-à-dire que sa valeur peut s'exprimer sans cette variable. Il va donc falloir manipuler cette équation et parvenir à supprimer tous les termes comportant ϕ. Pour ce faire, on manipule les radicands pour essayer de former un carré parfait. Cela permettra de supprimer les racines carrées, et vu la symétrie des radicands, des simplifications risquent d'apparaitre. Cette idée est renforcée par le fait qu'on précise le signe de a, b, c, ce que ne serait utile que pour calculer des valeurs absolues.*

On va donc commencer par manipuler le radicand de la première racine,

$$R = (a\cos\phi + c)^2 + b^2\sin^2\phi \tag{C.37}$$

Il va bien sûr falloir utiliser l'hypothèse $c^2 = b^2 - a^2$. Observant le radicand, on remarque que b est le seul terme n'apparaissant que au carré. a et c apparaissent tant au carré qu'à la première puissance, à cause du double produit. Il est donc préférable d'utiliser l'hypothèse dans le sens $b^2 = a^2 - c^2$. Ce faisant, (C.37) *devient*

$$(a\cos\phi + c)^2 + a^2\sin^2\phi + c^2\sin^2\phi$$

Si l'on développe le carré, la formule fondamentale permet les simplifications suivantes

$$\begin{aligned} R &= a^2\cos^2\phi + 2ac\cos\phi + c^2 + a^2\sin^2\phi - c^2\sin^2\phi \\ &= (a^2\cos^2\phi + a^2\sin^2\phi) + (c^2 - c^2\sin^2\phi) + 2ac\cos\phi \\ &= a^2 + c^2\cos^2\phi + 2ac\cos\phi \\ &= (a + c\cos\phi)^2 \end{aligned}$$

Et on est parvenu à ramener le radicand sous la forme d'un carré parfait. Procédant de manière analogue pour le deuxième radicand, l'identité (C.36) *devient.*

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{(a+c\cos\phi)^2}+\sqrt{(a-c\cos\phi)^2} \\ &= |a+c\cos\phi|+|a-c\cos\phi| \end{aligned}$$

Reste alors à lever ces valeurs absolues. Pour ce faire, on a besoin des autres hypothèses, qui sont

$$a>0 \quad b>0$$
$$c>0 \quad c>a$$

Comme l'expression doit être indépendante de ϕ*, il faut étudier le signe de* $a+c\cos\phi$ *et* $a-c\cos\phi$ *quelle que soit la valeur de* ϕ*. Or, on sait que, quel que soit* ϕ*, le cosinus est toujours compris entre* -1 *et* 1 *Dès lors, on aura, au vu des hypothèses*

$$\begin{array}{rcl} -1< & \cos\phi & <1 \\ -c< & c\cos\phi & <c\,;\ \textit{car } c \textit{ est positif} \\ a-c< & a+c\cos\phi & <a+c \end{array}$$

Or, par hypothèse, $a-c$ *est positif. Dès lors, on aura*

$$|a+c\cos\phi|=a+c\cos\phi$$

On procède de même pour étudier l'autre terme

$$\begin{array}{rcl} -1< & \cos\phi & <1 \\ -c< & c\cos\phi & <c\,;\ \textit{car } c \textit{ est positif} \\ c> & -c\cos\phi & >-c\,;\ \textit{car on multiplie par un négatif} \\ a+c> & a-c\cos\phi & >a-c \end{array}$$

Et, pour la même raison,

$$|a-c\cos\phi|=a-c\cos\phi$$

Au final, (C.36) *devient*

$$\begin{aligned} I &= a+c\cos\phi+a-c\cos\phi \\ &= 2a \end{aligned}$$

ce qui est bien indépendant de ϕ.

$\diamond$

Exemple 31 *Septembre 2010 - Question 3*

Soient trois nombres réels a, b et c, qui sont des éléments d'une progression arithmétique. Montrer que, en général, on a

$$\frac{\sin a + \sin b + \sin c}{\cos a + \cos b + \cos c} = \tan b \tag{C.38}$$

Pour quelles valeurs de la raison la proposition est-elle mise en défaut ?

Étudier la réciproque.

Résolution

On a pour hypothèse que

$$a = b - r \quad et \quad c = b + r$$

Injectons directement ces valeurs dans le membre de gauche de (C.38) *:*

$$lhs = \frac{\sin(b-r) + \sin b + \sin(b+r)}{\cos(b-r) + \cos b + \cos(b+r)}$$

L'hypothèse ayant été utilisée, il reste maintenant à utiliser des formules pour se ramener au membre de droite. Celui-ci ne comporte plus que l'argument b. On applique donc les formules de Simpson aux termes comportant r comme argument pour s'en débarrasser

$$\begin{aligned} lhs &= \frac{2\sin b\cos r + \sin b}{2\cos b\cos r + \cos b} \\ &= \frac{\sin b}{\cos b}\frac{2\cos r + 1}{2\cos r + 1} \\ &= \tan b \end{aligned}$$

et l'identité est démontrée, à supposer bien sûr que

$$2\cos r + 1 \neq 0$$

Dans le cas contraire, c'est-à-dire quand

$$r = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

la proposition n'est pas définie.

Étudier la réciproque revient à se demander si avoir la relation (C.38) *implique automatiquement que les nombres a, b et c sont en progression arithmétique. On a donc pour hypothèse que*

$$\frac{\sin a + \sin b + \sin c}{\cos a + \cos b + \cos c} = \tan b$$

Essayons de résoudre cette équation pour obtenir des liens entre les trois variables. On remarque déjà que tout mettre au même dénominateur permet des simplifications :

$$\begin{aligned}
\frac{\sin a+\sin b+\sin c}{\cos a+\cos b+\cos c}-\frac{\sin b}{\cos b} &= 0\\
\frac{\sin a\cos b+\sin c\cos b-\sin b\cos a-\sin b\cos c}{(\cos a+\cos b+\cos c)\cos b} &= 0\\
\frac{\sin(a-b)+\sin(c-b)}{(\cos a+\cos b+\cos c)\cos b} &= 0\\
\sin(a-b) &= \sin(b-c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a-b=b-c+2k\pi \quad &ou \quad a-b=\pi-b+c+2k\pi\\
b=\frac{a+c}{2}+k\pi \quad &ou \quad a=c+(1+2k)\pi
\end{aligned}$$

La deuxième solution est à rejeter. En effet, si

$$a=c+(1+2k)\pi$$

on a

$$\begin{aligned}
\cos a &= -\cos c\\
\sin a &= -\sin c
\end{aligned}$$

et l'équation (C.38) *se réduit à*

$$\tan b=\tan b$$

qui ne permet pas de déduire quoi que ce soit.
Au final, si $a\neq c+(1+2k)\pi$, l'équation (C.38) *implique que*

$$b=\frac{a+c}{2}+k\pi$$

Et on n'a pas toujours de progression arithmétique. La réciproque est fausse en règle générale, et ne sera vraie que si l'on impose la condition supplémentaire

$$\left|b-\frac{a+c}{2}\right|<\pi$$

Si l'on veut résumer les résultats de l'exercice, on aura :
d'une part, si a, b et c sont en progression arithmétique, si b est non nul et si la raison est

différente de $\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$

alors on a

$$\frac{\sin a+\sin b+\sin c}{\cos a+\cos b+\cos c}=\tan b$$

d'autre part, si $a\neq c+(1+2k)\pi$*, si* $\left|b-\frac{a+c}{2}\right|<\pi$ *et si*

$$\frac{\sin a+\sin b+\sin c}{\cos a+\cos b+\cos c}=\tan b$$

alors les nombres a, b et c sont en progression arithmétique.

$\diamond$

Exemple 32 *Septembre 2005 - Question 3*

Soit un système bielle - manivelle représenté à la figure C.1. On demande de :

1. *calculer l'angle α en fonction de l'angle θ, les paramètres r, l et e étant connus ;*
2. *en déduire les conditions d'existence de l'angle α en fonction des valeurs des paramètres r, l et e ;*
3. *calculer la valeur numérique de l'angle α pour $\theta = 30°$, $r = 1cm$, $l = 5cm$, $e = 0.1cm$;*
4. *en déduire la valeur correspondante de la position x du point C.*

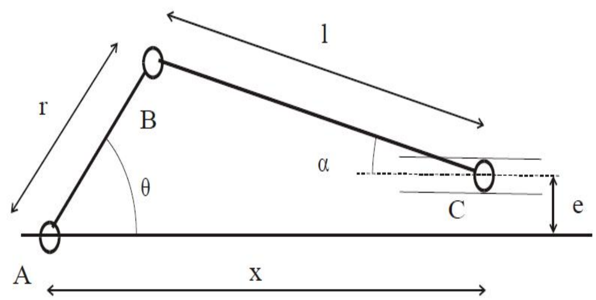


FIGURE C.1 – Calcul de la position d'un piston

1. Choix des triangles

On désire exprimer α comme une fonction de θ, r, l et e. Il faut donc choisir des triangles, de préférence rectangles, permettant de faire apparaitre ces valeurs. Prolonger l'horizontale qui passe en C est tentant, mais ne conduit qu'à des triangles quelconques dont seules deux données sont connues. Il est nettement plus judicieux de tracer la verticale passant par B, ce qui donne deux triangles rectangles, dont r et l sont les hypoténuses, α et θ sont des angles. Ces triangles sont représentés à la figure C.2.

Démarche - Résolution

On veut maintenant passer de α à θ en n'utilisant que les paramètres r, l et e. Dans le triangle BCX, on commence donc par utiliser la formule en sinus, pour faire intervenir l'hypoténuse l et le côté vertical. Ce côté est choisi car, contrairement à l'autre, il peut s'exprimer en fonction de e et d'un côté du deuxième triangle, ABX. Cela donne donc

$$\sin \alpha = \frac{|BX|}{l}$$

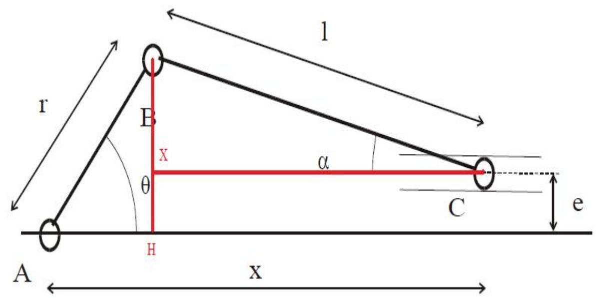


Figure C.2 – Calcul de la position d'un piston, annoté

On passe d'un triangle à l'autre via

$$|BX| = |BH| - e$$

Ce côté, BH, fera intervenir les données restantes l et θ au moyen d'une formule en sinus, selon

$$|BH| = r \sin\theta$$

On a donc bien trouvé une démarche qui nous permet d'exprimer l'angle α en fonction des paramètres imposés. Il n'y a plus qu'à remettre tout ensemble.

$$\begin{aligned}
\sin\alpha &= \frac{|BX|}{l} \\
&= \frac{|BH| - e}{l} \\
&= \frac{r\sin\theta - e}{l}
\end{aligned} \tag{C.39}$$

2. Conditions d'existence.

On demande ensuite de rechercher les conditions d'existence de l'angle α. Pour que cet angle existe, il faut que son sinus soit compris entre -1 et 1, c'est-à-dire que

$$\begin{aligned}
-1 < & \quad \tfrac{r\sin\theta - e}{l} & < 1 \\
-l < & \quad r\sin\theta - e & < l \\
-l + e < & \quad r\sin\theta & < l + e \\
\frac{-l + e}{r} < & \quad \sin\theta & < \frac{l + e}{r}
\end{aligned}$$

La condition d'existence ne doit plus faire intervenir que r, l et e. On doit se débarrasser de θ, c'est-à-dire trouver une condition qui soit vérifiée quel que soit l'angle θ considéré. Si l'on *prend la première inéquation,*

$$\frac{-l+e}{r} < \sin\theta$$

Cette inéquation doit être vraie pour tout θ*, donc pour tout* $\sin\theta \in [-1,1]$*. La condition la plus restrictive aura donc lieu quand le sinus sera minimal, c'est-à-dire pour*

$$\begin{aligned}\frac{-l+e}{r} &< -1\\ r &< l-e\end{aligned}$$

Comme r *est une longueur,* r *est positif, ce qui ajoute la condition supplémentaire* $l-e>0$*.*
De manière analogue, la deuxième inéquation sera vraie pour tout θ *si*

$$\begin{aligned}\frac{l+e}{r} &> 1\\ l+e &> r\end{aligned}$$

Au total, il faut donc que

$$\begin{aligned}r &< l-e\\ r &< l+e\\ e &< l\end{aligned}$$

3. Substitution numérique

On remplace simplement les paramètres par leur valeur dans l'équation (C.39)*, pour obtenir*

$$\sin\alpha = 0.08$$

ce qui donne les deux solutions

$$\alpha = 4.59^\circ \quad ou \quad \alpha = 175,41^\circ$$

4. Position de C*.*

Il suffit d'utiliser les formules dans les deux triangles rectangles

$$\begin{aligned}|AH| &= r\cos\theta\\ |XC| &= l\cos\alpha\end{aligned}$$

ce qui donne

$$x = |AH| + |XC|$$

$$x = 5.85cm \quad ou \quad x = -4.12cm$$

◇

Exemple 33 *Septembre 2006 - Question 4*

Le ménisque convergent représenté à la figure C.3 est limité à gauche par un arc de cercle de rayon $R_1 = 50mm$ et à droite par un arc de cercle de rayon $R_2 = 1000mm$. Il s'étend vers le haut et le bas d'une hauteur $H = 32.5\ mm$. Sachant que l'épaisseur minimale du ménisque (sur l'axe de symétrie) vaut $h_0 = 2mm$, quelle est son épaisseur h sur les bords ?

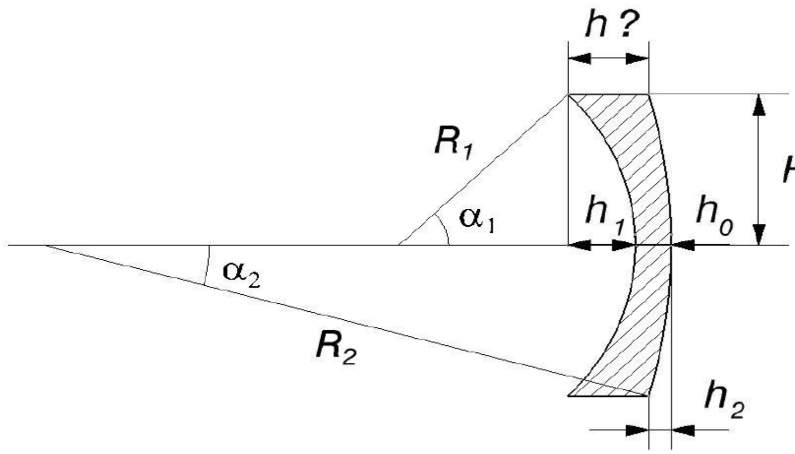


FIGURE C.3 – Ménisque convergent

Choix des triangles

Les données sont R_1, R_2, H et h_0. On recherche donc des triangles, rectangles de préférence, faisant intervenir ces données. Comme on le voit à la figure C.4, les triangles ABC et DEF sont rectangles et font intervenir chacun deux de ces données. Deux données étant connues, ces triangles peuvent être résolus totalement. Il semble donc judicieux d'exprimer l'inconnue h en fonction de longueurs appartenant à ces triangles.

Démarche

On veut exprimer h comme combinaison de longueurs que l'on peut calculer dans les triangles ABC et DEF, c'est-à-dire les longueurs $|AB|$ et $|DF|$. Cependant, il reste une hypothèse qui n'a pas encore été utilisée, la longueur h_0. il faut donc la faire intervenir dans l'expression de h. Observant bien le schéma, on remarque que

$$h = h_1 + h_0 - h_2 \tag{C.40}$$

où h_0 est connu. Il reste donc à calculer h_1 et h_2 en se ramenant aux triangles rectangles.

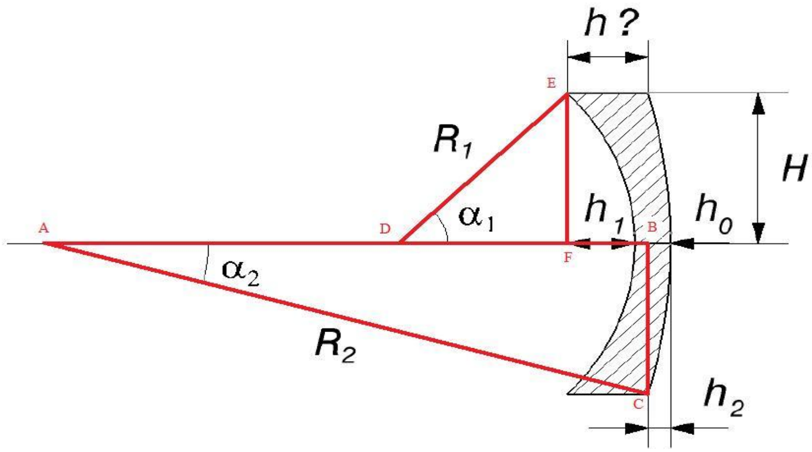


FIGURE C.4 – Ménisque convergent, annoté

Ces valeurs sont calculées en se souvenant que les bords du ménisque sont des arcs de cercle. On a donc

$$h_1 = R_1 - |DF| \tag{C.41}$$

$$h_2 = R_2 - |AB| \tag{C.42}$$

et on sait que les longueurs $|DF|$ et $|AB|$ sont calculées dans les triangles rectangles.

Résolution

Il suffit donc de faire le chemin inverse en calculant toutes les données. Dans le triangle ABC,

$$|AB| = \sqrt{R_2^2 - H^2} = 999.47mm$$

De même, dans DEF

$$|DF| = \sqrt{R_1^2 - H^2} = 38.00mm$$

Les équations (C.41) *et* (C.42) *nous donnent*

$$h_1 = R_1 - |DF| = 12mm$$

$$h_2 = R_2 - |AB| = 0.53mm$$

Enfin, (C.40) *nous donne la réponse souhaitée*

$$h_0 = h_1 + h_0 - h_2 = 13.47mm$$

◇

Exemple 34 *Juillet 2008 - Question 3*

Dans un demi-cercle de rayon R, on trace trois cordes C_1, C_2, C_3 parallèles à la base rectiligne du demi-cercle. La distance h entre C_1 et C_2 est égale à la distance entre C_2 et C_3.
On mesure $C_1 = 8m$, $C_2 = 16m$, $C_3 = 20m$.
Quel est le rayon R du demi-cercle ?

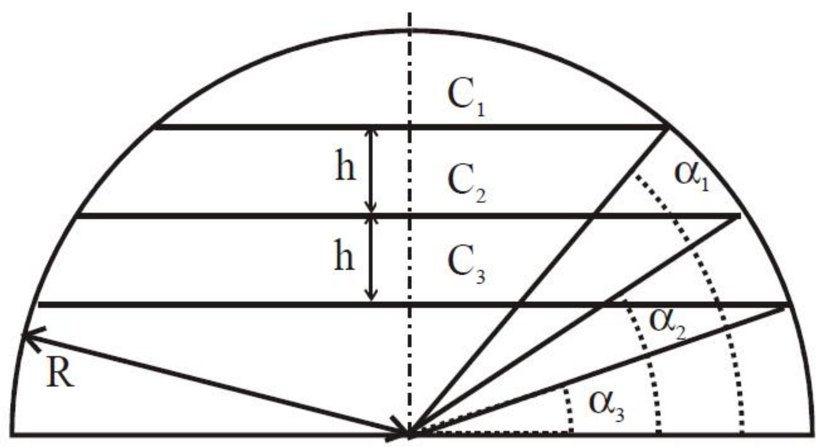


FIGURE C.5 – Demi-cercle de rayon R avec ses trois cordes C_1, C_2, C_3

Choix des triangles

On commence donc par faire apparaitre les triangles, voir figure C.6. On pourrait vouloir travailler dans les triangles quelconques OAI, OBH ou encore OCG, car la longueur d'un côté est donnée et les deux autres longueurs sont l'inconnue recherchée. Cependant, ces triangles sont quelconques, ce qui fait que les formules sont plus compliquées et qu'il faut trois, non deux, données pour les résoudre. On évitera de travailler dans ces triangles, d'autant plus que des triangles rectangles sont présents. Par exemple, les triangles OFI, OEH et ODG sont rectangles, contiennent chacun une demi-corde et leur hypoténuse est l'inconnue. On va donc utiliser ces triangles-là.

Démarche

Une fois les triangles choisis, il faut déterminer quelles formules utiliser. Ce choix est évidemment guidé par les données et inconnues. Dans ce cas-ci, on voudrait lier les demi-cordes avec le rayon, ce qui peut se faire en faisant intervenir soit le troisième côté, via Pythagore,

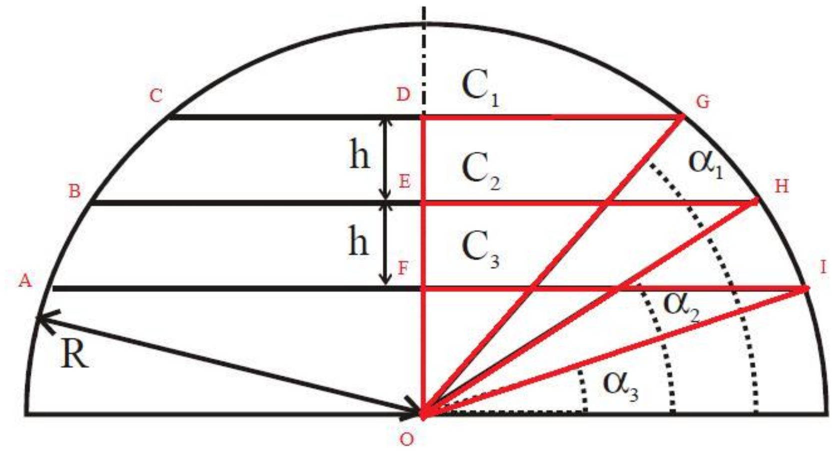


FIGURE C.6 – Demi-cercle de rayon R avec ses trois cordes C_1, C_2, C_3, annoté

soit un des angles du triangle. Cependant, la dernière hypothèse porte sur le troisième côté, vu qu'elle nous dit que $|DE| = |EF|$, tandis que rien n'est connu à propos des angles. On écrit donc la formule de Pythagore dans les trois triangles OFI, OEH et ODG

$$\begin{aligned}
|OI|^2 &= |OF|^2 + |FI|^2 \\
|OH|^2 &= |OE|^2 + |EH|^2 \\
|OG|^2 &= |OD|^2 + |DG|^2
\end{aligned}$$

On réécrit ces valeurs en fonction des hypothèses

$$R^2 = |OF|^2 + \frac{C_3^2}{4} \tag{C.43}$$

$$R^2 = (|OF| + h)^2 + \frac{C_2^2}{4} \tag{C.44}$$

$$R^2 = (|OF| + 2h)^2 + \frac{C_1^2}{4} \tag{C.45}$$

et on obtient un système de trois équations à trois inconnues, R, h et $|OF|$. La partie trigonométrique de l'énoncé est terminée, il reste juste à résoudre ce système pour obtenir la solution.

Résolution

Bien que ce système soit non-linéaire, on peut quand même le résoudre facilement. Il suffit d'éliminer les termes quadratiques pas des combinaisons linéaires appropriées. En effet, les *termes* R^2 *et* $|OF|^2$ *peuvent être éliminés des équations via les combinaisons*

$$\text{(C.43)} \quad \Rightarrow \quad R^2 = |OF|^2 + \frac{C_3^2}{4} \tag{C.46}$$

$$\text{(C.44)} - \text{(C.43)} \quad \Rightarrow \quad 0 = 2|OF|h + h^2 + \frac{C_2^2}{4} - \frac{C_3^2}{4} \tag{C.47}$$

$$\text{(C.45)} - \text{(C.43)} \quad \Rightarrow \quad 0 = 4|OF|h + 4h^2 + \frac{C_1^2}{4} - \frac{C_3^2}{4} \tag{C.48}$$

Éliminer le double produit entre les équations (C.47) *et* (C.48) *permet d'obtenir une équation ne contenant plus que l'inconnue* h^2

$$\text{(C.46)} \quad \Rightarrow \quad R^2 = |OF|^2 + \frac{C_3^2}{4} \tag{C.49}$$

$$\text{(C.47)} \quad \Rightarrow \quad 0 = 2|OF|h + h^2 + \frac{C_2^2}{4} - \frac{C_3^2}{4} \tag{C.50}$$

$$\text{(C.48)} - 2\text{(C.47)} \quad \Rightarrow \quad 0 = 2h^2 + \frac{C_1^2}{4} - 2\frac{C_2^2}{4} + \frac{C_3^2}{4} \tag{C.51}$$

L'équation (C.51) *nous donne*

$$h = \sqrt{-\frac{C_1^2}{8} + \frac{C_2^2}{4} - \frac{C_3^2}{8}} = \sqrt{6}m$$

Insérer ceci dans (C.50) *permet de calculer* $|OF|$

$$|OF| = \frac{1}{h}(-\frac{h^2}{2} - \frac{C_2^2}{8} + \frac{C_3^2}{8}) = \frac{15}{\sqrt{6}}m$$

Enfin, l'équation (C.49) *nous donne* R

$$R = \sqrt{|OF|^2 + \frac{C_3^2}{4}} = \sqrt{137.5}m$$

◇

Exemple 35 *Juillet 2000 - Question 3*

On donne l'aire du triangle ABC dont les longueurs des côtés sont connues. Par le sommet A, à l'intérieur du triangle, on mène deux segments de droites $[A, B']$ et $[A, C']$ formant avec $[A, B]$ et $[A, C]$ des angles de 20 degrés, tels que B' et C' appartiennent au côté $[B, C]$ (voir figure C.7).

Calculer la surface de $AB'C'$.

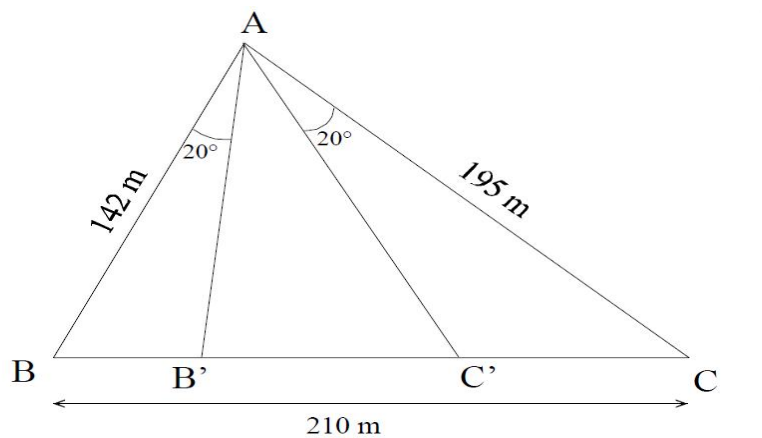


FIGURE C.7 – Juillet 2000 - Question 3

Choix des triangles

Pas le choix ici, il faudra passer par les triangles quelconques représentés à la figure C.7.

Démarche

On désire calculer la surface du triangle $AB'C'$. On devra donc utiliser la formule Aire = $\frac{1}{2}bc\sin\alpha$ Cette formule peut évidemment être utilisée avec n'importe quel angle. Ici, on essaiera de se servir de l'angle $\widehat{B'AC'}$. On doit donc évaluer cet angle, ainsi que les côtés $|AB'|$ et $|AC'|$, avant d'utiliser

$$Aire = \frac{1}{2}|AB'||AC'|\sin\widehat{B'AC'} \tag{C.52}$$

- *$\widehat{B'AC'}$. Pour évaluer cet angle, il suffit de connaitre l'angle $\widehat{BAC}$, qui peut-être lui-même évalué dans le triangle ABC au moyen de Pythagore généralisé.*
- *$|AB'|$. Cette longueur intervient dans le triangle BAB', dans lequel on connait déjà une longueur et un angle. Un deuxième angle, l'angle $\widehat{ABC}$, peut être calculé via Pythagore*

généralisé dans le triangle ABC. La formule en sinus s'applique alors pour calculer la longueur recherchée.

– $|AC'|$. *Cette longueur est calculée de manière analogue à la longueur* $|AC'|$. *On évalue d'abord* $\widehat{BCA}$ *via Pythagore, puis* $|AC'|$ *via la formule en sinus dans le triangle* ACC'.

Résolution

On calcule les valeurs nécessaires selon la méthode décrite précédemment.

$$\begin{aligned}
\textit{Triangle } ABC: &\quad \widehat{BAC} = \ arccos\tfrac{|AB|^2+|AC|^2-|BC|^2}{2|AB||AC|} &&= 75,2616^\circ \\
\textit{Angles en } A: &\quad \widehat{B'AC'}' = \widehat{BAC} - 20^\circ - 20^\circ &&= 35,2616^\circ && \text{(C.53)} \\
\textit{Triangle } ABC: &\quad \widehat{ABC} = \ arccos\tfrac{|AB|^2+|BC|^2-|AC|^2}{2|AB||BC|} &&= 63,8989^\circ \\
\textit{Triangle } ABC: &\quad \widehat{BB'}A = 180^\circ - 20^\circ - \widehat{ABC} &&= 96,1011^\circ \\
\textit{Triangle } ABB': &\quad |AB'| = |AB|\tfrac{\sin\widehat{ABC}}{\sin\widehat{BB'A}} &&= 128,25m && \text{(C.54)} \\
\textit{Triangle } ABC: &\quad \widehat{ACB} = \ arccos\tfrac{|AC|^2+|BC|^2-|AB|^2}{2|AC||BC|} &&= 40,8395^\circ \\
\textit{Triangle } ABC: &\quad \widehat{CC'}A = 180^\circ - 20^\circ - \widehat{ACB} &&= 119,1605^\circ \\
\textit{Triangle } ACC': &\quad |AC'| = |AC|\tfrac{\sin\widehat{ACB}}{\sin\widehat{CC'A}} &&= 146,03m && \text{(C.55)}
\end{aligned}$$

Pour finir, (C.53), (C.54) *et* (C.55) *sont placées dans la formule* (C.52), *pour donner*

$$Aire = \frac{1}{2}|AB'||AC'|\sin\widehat{B'AC'} = 5405,70m^2$$

◇

Exemple 36 *Juillet 1999 - Question 3*

$$Connaissant les distances suivantes \quad \begin{aligned} \textit{Bruxelles - Lisbonne} &= 1713km \\ \textit{Athènes - Bruxelles} &= 2089km \\ \textit{Berlin - Lisbonne} &= 2310km \\ \textit{Athènes - Berlin} &= 1801km \\ \textit{Bruxelles - Rome} &= 1182km \\ \textit{Lisbonne - Rome} &= 1873km \\ \textit{Athènes - Rome} &= 1040km \end{aligned}$$

Calculer la distance Berlin - Bruxelles.

Suggestion : utiliser uniquement les formules de calcul d'angles ou de côtés dans des triangles, après avoir représenté graphiquement la situation géographique des villes.

Choix des triangles

Suivant la suggestion, on arrive à la figure C.8. Par facilité, les distances connues on été renommées a, b, ..., la distance recherchée x. Comme les triangles sont tous quelconques, il faudra bien passer par les formules complètes. En cas de besoin, on pourra toujours rajouter les distances $|B'R|$ et $|AL|$ pour faire intervenir d'autres triangles.

Démarche

On désire calculer la distance x. Comme seules des distances sont connues, on est tenté d'utiliser Pythagore généralisé. On choisit donc un triangle faisant intervenir x, et on essaie de se ramener à des données connues en passant d'un triangle à l'autre. On commence par exemple dans le triangle $BB'L$. Pour calculer x, on a besoin de a, c et de l'angle BLB'. a et c étant connus, on doit alors évaluer l'angle BLB', par exemple en soustrayant les angles BLA et $B'LA$, qu'il faut alors calculer. On continue jusqu'à parvenir à tout évaluer. La démarche totale sera

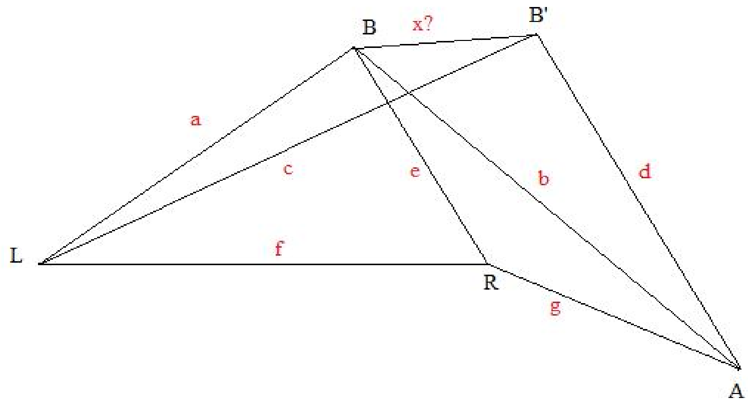


FIGURE C.8 – Représentation graphique de la situation géographique

Triangle $BB'L$:	$x^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{BLB'}$	*a, b connus , $\widehat{BLB'}$ inconnu*
Angles en L :	$\widehat{BLB'} = \widehat{BLA} - \widehat{B'LA}$	*$\widehat{BLA}, \widehat{B'LA}$ inconnus*
Triangle BLA :	$\cos\widehat{BLA} = \frac{a^2+\lvert AL\rvert^2-b^2}{2a\lvert AL\rvert}$	*a, b connus, $\lvert AL\rvert$ inconnu*
Triangle $B'LA$:	$\cos\widehat{B'LA} = \frac{d^2+\lvert AL\rvert^2-c^2}{2d\lvert AL\rvert}$	*c, d connus, $\lvert AL\rvert$ inconnu*
Triangle ALR :	$\lvert AL\rvert^2 = f^2 + g^2 - 2fg\cos\widehat{ARL}$	*f, g connus, $\widehat{ARL}$ inconnu*
Angles en R :	$\widehat{ARL'} = 360 - \widehat{ARB} - \widehat{BRL}$	*$\widehat{ARB}, \widehat{BRL}$ inconnus*
Triangle ARB :	$\cos\widehat{ARB} = \frac{e^2+g^2-b^2}{2ag}$	*Tout est connu*
Triangle BRL :	$\cos\widehat{BRL} = \frac{e^2+f^2-a^2}{2ef}$	*Tout est connu*

En résumé, on part de l'inconnue, et on regarde les données qui manquent pour calculer cette inconnue. On procède de même pour ces données, jusqu'à arriver à une étape où tout est connu.

Résolution

Il suffit maintenant de refaire la procédure en sens inverse en calculant les valeurs étapes par *étape.*

$$\begin{array}{rcl}
\textit{Triangle } BRL: & \widehat{BRL} = \arccos \frac{e^2+f^2-a^2}{2ef} & = 63,5691^\circ \\
\textit{Triangle } ARB: & \widehat{ARB} = \arccos \frac{e^2+g^2-b^2}{2eg} & = 140,0664^\circ \\
\textit{Angles en } R: & \widehat{ARL}' = 360 - \widehat{BRL} - \widehat{ARB} & = 156.3645^\circ \\
\textit{Triangle } ALR: & |AL| = \sqrt{f^2 + g^2 - 2fg \cos \widehat{ARL}} & = 2856.36km \\
\textit{Triangle } B'LA: & \widehat{B'LA} = \arccos \frac{c^2+|AL|^2-d^2}{2c|AL|} & = 39.0292^\circ \\
\textit{Triangle } BLA: & \widehat{BLA} = \arccos \frac{a^2+|AL|^2-b^2}{2a|AL|} & = 46.5560^\circ \\
\textit{Angles en } L: & \widehat{BLB'} = \widehat{BLA} - \widehat{B'LA} & = 7.5268^\circ \\
\textit{Triangle } BB'A: & x = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos \widehat{BLB'}} & = 651.61km
\end{array}$$

La difficulté de cet exercice n'est pas dans les formules, vu qu'on utilise toujours la même. Elle est dans la démarche, qui est assez longue. Il faut donc procéder méthodiquement, et éviter de tourner en rond. Si cela arrive, il faut changer de démarche, c'est-à-dire tester d'autres triangles. Par exemple, l'angle $\widehat{BLB'}$ *peut aussi être calculé à partir des angles* $\widehat{BLR}$ *et* $\widehat{B'LR}$. *Pour calculer* $\widehat{B'LR}$, *on a besoin de la distance* $|BB'|$, *qui est calculée dans le triangle* $AB'R$ *à partir de l'angle* $\widehat{B'AR}$. *Pour évaluer cet angle-ci, on a besoin de* x, *dans le triangle* $B'RA$. *On a donc tourné en rond, ce qui veut dire qu'il faut essayer autrement.*

◇

Exemple 37 *Juillet 2006 - Question 2*

Dans le triangle ABC (voir figure C.9), la hauteur AD est coupée en son milieu H par la hauteur CE. Montrer tout d'abord que

$$\tan B \tan C = 2$$

Sachant ensuite que dans tout triangle, on a la relation générale

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C \tag{C.56}$$

Quelles sont les valeurs de l'angle A pour lesquelles la relation

$$\tan B \tan C = 2$$

soit possible ?

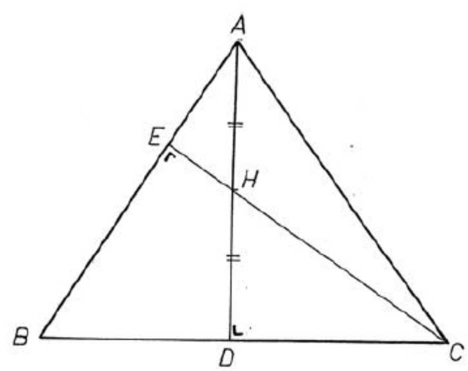


FIGURE C.9 – Triangle ABC dont la hauteur AD est coupée en son milieu H par la hauteur CE

Première partie

On commence par traduire l'énoncé en terme de thèse et hypothèses.

Hypothèses

$$ABC \text{ un triangle}$$

$$AD \perp BC$$

$$CE \perp AB$$

$$|AH| = |HD| \tag{C.57}$$

Thèse

$$\tan B \tan C = 2 \tag{C.58}$$

Démonstration

Si la thèse est vérifiée, il existe donc un lien entre les angles B et C. On va partir de l'un et essayer de se ramener à l'autre, au moyen des formules dans les triangles et des hypothèses. On part de C pour se ramener à B, car la tangente de C ne peut s'exprimer que dans le triangle ADC, tandis que B pourrait s'exprimer dans les triangles ADB et BEC. On a donc

$$\tan C = \frac{|AD|}{|DC|} \tag{C.59}$$

Observant la thèse, on remarque qu'un facteur 2 doit apparaitre. La seule hypothèse permettant cela est l'équation (C.57)*, qui peut s'écrire*

$$|AD| = 2|AH| = 2|HD|$$

L'équation (C.59) *devient*

$$\tan C = 2\frac{|AH|}{|DC|} = 2\frac{|HD|}{|DC|}$$

Il faut maintenant choisir si l'on prend l'expression avec $|AH|$ ou avec $|HD|$. On choisira en se souvenant que l'on doit se ramener à $\tan B$. Pour se ramener à une tangente, il faut évidemment que le numérateur et le dénominateur soient côtés d'un même triangle. On conservera donc l'équation avec $|HD|$

$$\tan C = 2\frac{|HD|}{|DC|} = 2\tan \widehat{ECB}$$

La thèse ne sera donc vraie que si

$$\tan \widehat{ECB} = \frac{1}{\tan B}$$

C'est bien le cas, si l'on remarque que les triangles ABC et CBE sont semblables. En effet, les angles $\widehat{ADB}$ et $\widehat{CEB}$ sont tous les deux droits, et l'angle $\widehat{ABC}$ est commun aux deux *triangles. Dès lors, les angles* $\widehat{DAB}$ *et* $\widehat{ECB}$ *sont aussi égaux. On aura donc.*

$$\begin{aligned} \tan C &= 2\tan\widehat{ECB} \\ &= 2\tan\widehat{DAB} \\ &= 2\cot\widehat{ABC} \\ &= 2\cot B \end{aligned}$$

Deuxième partie

On va supposer que $\tan B \tan C = 2$, *puis utiliser l'équation* (C.56) *pour rechercher les valeurs de* A *qui sont possibles. Cela donnera*

$$\begin{aligned} \tan A + \tan B + \tan C &= \tan A \tan B \tan C \\ \tan A + \tan B + \frac{2}{\tan B} &= 2\tan A \\ \tan^2 B - \tan A \tan B + 2 &= 0 \end{aligned}$$

ce qui n'est possible que si

$$\begin{aligned} \rho = \tan^2 A - 8 &> 0 \\ \tan^2 A &> 8 \end{aligned}$$

◇

Exemple 38 *Septembre 2006 - Question 2*

Soit ABC un triangle et soit $\mathcal{D}$ une droite qui coupe le côté AB en un point F, le côté AC en un point E et le prolongement du côté BC en un point D (voir figure C.10). On donne les rapports

$$\frac{|FA|}{|FB|} = \frac{1}{3} \qquad \frac{|EA|}{|EC|} = \frac{2}{3}$$

Que vaut le rapport $\frac{|DC|}{|DB|}$?

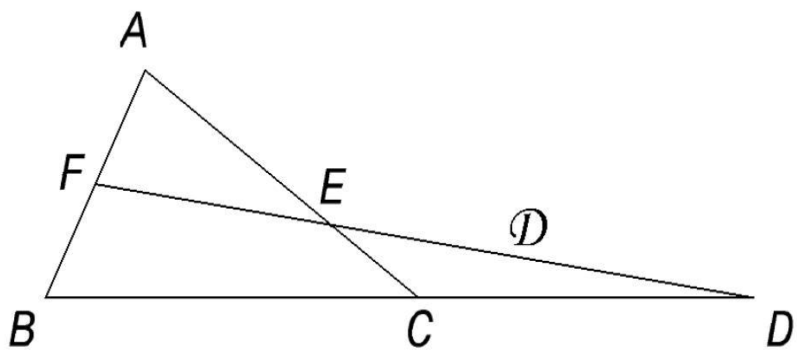


FIGURE C.10 – Septembre 2006 - Question 4

Résolution

Les triangles sont tous quelconques. On a donc à notre disposition les formules de Pythagore généralisé et la relation des sinus. Comme ce que l'on recherche est un rapport, on utilisera plutôt la formule des sinus.

On va donc partir du rapport que l'on recherche et se ramener, via les relations en sinus, aux rapports connus.

On commence par modifier $|DC|$. Cette longueur n'apparait que dans le triangle DCE. La relation des sinus peut donc s'y écrire.

$$|DC| = |DE| \left(\frac{\sin \widehat{CED}}{\sin \widehat{ECD}} \right) = |CE| \left(\frac{\sin \widehat{CED}}{\sin \widehat{CDE}} \right)$$

Il faut maintenant choisir quelle écriture on va prendre. Comme toujours en cas de doute, on regarde les hypothèses, et on remarque que la longueur $|CE|$ est présente dans un des rapports connus, tandis que $|DE|$ ne l'est pas. On choisit donc d'écrire

$$|DC| = |CE| \left(\frac{\sin \widehat{CED}}{\sin \widehat{CDE}} \right)$$

On procède de même concernant la longueur $|DB|$, dans le triangle ABD. On l'exprimera donc en fonction de $|FB|$ via

$$|DB| = |FB| \left(\frac{\sin \widehat{BFD}}{\sin \widehat{BDF}} \right)$$

Le rapport que l'on désire calculer devient alors

$$\frac{|DC|}{|DB|} = \frac{|CE|}{|FB|} \left(\frac{\sin \widehat{CED} \sin \widehat{BDF}}{\sin \widehat{CDE} \sin \widehat{BFD}} \right)$$

Les angles $\widehat{BDF}$ et $\widehat{CDE}$ sont évidemment les mêmes, ce qui donne pour rapport

$$\frac{|DC|}{|DB|} = \frac{|CE|}{|FB|} \left(\frac{\sin \widehat{CED}}{\sin \widehat{BFD}} \right)$$

Les longueurs interviennent dans les hypothèses. On n'y touche donc plus. Il faut à présent exprimer les sinus que l'on a en fonction des données des rapports que l'on n'a pas encore. De plus, il faut changer de triangles, car ainsi on utilisera des relations linéairement indépendantes. On peut par exemple remarquer que

$$\begin{aligned} \widehat{CED} = \widehat{AEF} \quad &\Rightarrow \quad \sin \widehat{CED} = \sin \widehat{AEF} \\ \widehat{BFD} = \pi - \widehat{AFE} \quad &\Rightarrow \quad \sin \widehat{BFD} = \sin \widehat{AFE} \end{aligned}$$

Le rapport devient donc

$$\frac{|DC|}{|DB|} = \frac{|EC|}{|FB|} \left(\frac{\sin \widehat{AEF}}{\sin \widehat{AFE}} \right)$$

Or dans le triangle AEF, on a

$$\frac{\sin \widehat{AEF}}{\sin \widehat{AFE}} = \frac{|FA|}{|EA|}$$

qui sont justement les deux autres longueurs fournies par hypothèse. Finalement, cela donne

$$\frac{|DC|}{|DB|} = \frac{|EC||FA|}{|EA||FB|} = \frac{1}{2}$$

◇

Exemple 39 *Juillet 2007 - Question 4*

Soit le trapèze isocèle $ABCD$ représenté à la figure C.11. La grande base a une longueur t, la hauteur vaut h, l'angle entre ses côtés obliques et la verticale est noté α et la petite base a une longueur notée b. On déplace le sommet C vers la droite d'une distance x, de telle sorte que le côté BC' est incliné d'un angle θ par rapport à BC. On considère alors le trapèze $ABC'D'$ tel que $C'D' = CD = b$. Le côté AD' est alors incliné d'un angle ϕ par rapport à AD.

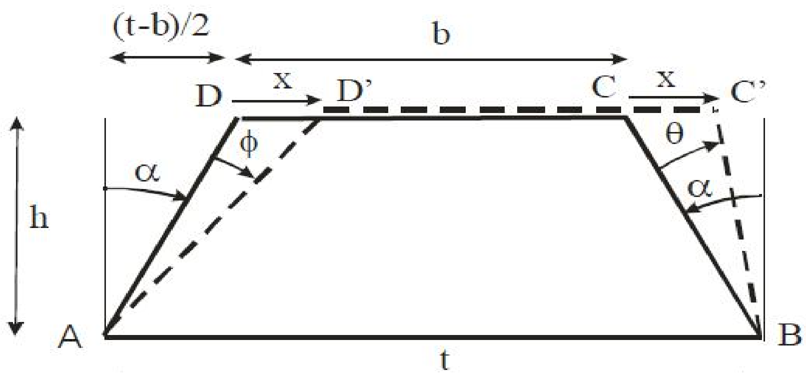


FIGURE C.11 – Juillet 2007 - Question 4

Montrer qu'il existe un angle α tel que

$$\cot\phi - \cot\theta = 2$$

quel que soit le déplacement $x = CC'$.

Résolution

On doit montrer qu'on peut trouver un angle α qui soit tel que $\cot\phi - \cot\theta = 2$. Si c'est bien le cas, on doit pouvoir partir du membre de gauche et arriver à une certaine expression en α, qui se réduira à 2 par un choix judicieux.

Comme toujours, on commence par regarder les triangles disponibles. Comme on nous donne une expression contenant les angles θ et ϕ, on est tenté de travailler dans les triangles quelconques contenant ces angles. Cependant, de tels calculs semblent lourds, surtout qu'il n'est pas évident de faire intervenir l'angle α.

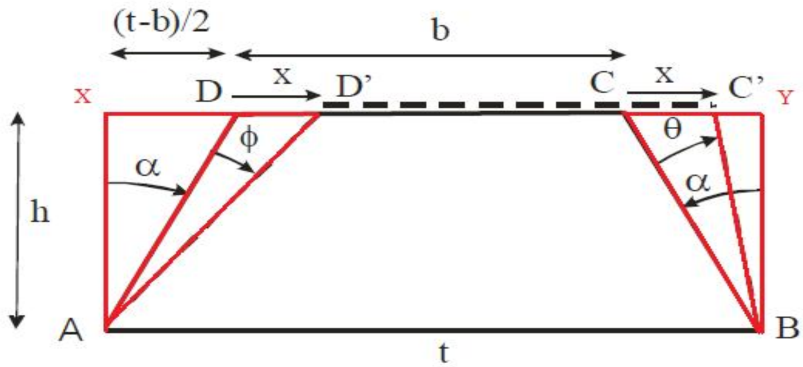


FIGURE C.12 – Juillet 2007 - Question 4, annoté

Si l'on se souvient qu'il faut toujours privilégier des triangles rectangles aux triangles quelconques, on peut alors considérer les triangles AXD, AXD', BCY ou encore $BC'Y$, représentés à la figure C.12. Pour se ramener à ces triangles, il faut utiliser l'artifice

$$\cot\phi - \cot\theta = \cot((\phi+\alpha)-\alpha) - \cot(\alpha-(\alpha-\theta))$$

On utilise alors les formules d'addition pour faire intervenir les angles $\phi+\alpha$, $\alpha-\theta$ et α, angles qui interviennent dans des triangles rectangles.

$$\cot\phi - \cot\theta = \frac{1+\tan(\phi+\alpha)\tan\alpha}{\tan(\phi+\alpha)-\tan\alpha} - \frac{1+\tan\alpha\tan(\alpha-\theta)}{\tan\alpha-\tan(\alpha-\theta)} \tag{C.60}$$

On peut exprimer ces tangentes en fonctions de t, b, x et h, en travaillant dans les triangles rectangles mentionnées précédemment.

$$\begin{aligned} &\textit{Triangle } AXD & \tan\alpha &= \frac{t-b}{2h} \\ &\textit{Triangle } AXD' & \tan(\alpha+\phi) &= \frac{t-b+2x}{2h} \\ &\textit{Triangle } BC'Y & \tan(\alpha-\theta) &= \frac{t-b-2x}{2h} \end{aligned} \tag{C.61}$$

On insère ces valeurs dans (C.60)*, qui se simplifie alors grandement*

$$\begin{aligned}
\cot\phi - \cot\theta &= \frac{1+\frac{t-b+2x}{2h}\frac{t-b}{2h}}{\frac{t-b+2x}{2h}-\frac{t-b}{2h}} - \frac{1+\frac{t-b-2x}{2h}\frac{t-b}{2h}}{\frac{t-b}{2h}-\frac{t-b-2x}{2h}} \\
&= \frac{1+\frac{t-b+2x}{2h}\frac{t-b}{2h}}{\frac{x}{h}} - \frac{1+\frac{t-b-2x}{2h}\frac{t-b}{2h}}{\frac{x}{h}} \\
&= \frac{h}{x}\left(\left(1+\frac{t-b+2x}{2h}\frac{t-b}{2h}\right)-\left(1+\frac{t-b-2x}{2h}\frac{t-b}{2h}\right)\right) \\
&= \frac{h}{x}\frac{4x}{2h}\frac{t-b}{2h} \\
&= 2\frac{t-b}{2h} \\
&= 2\tan\alpha
\end{aligned}$$

en se souvenant de (C.61)*.*

Prenant alors $\alpha = \frac{\pi}{4}$*, on obtient bien que*

$$\cot\phi - \cot\theta = 2$$

On a bien montré qu'il existait un angle α*, en l'occurrence* $\frac{\pi}{4}$*, qui vérifiait l'identité. La difficulté de cet exercice n'est pas dans les calculs ou l'utilisation des formules, mais bien dans le choix des triangles. Cet exemple montre bien qu'il est préférable d'utiliser autant que possible les triangles rectangles.*

$\diamond$

Table des matières